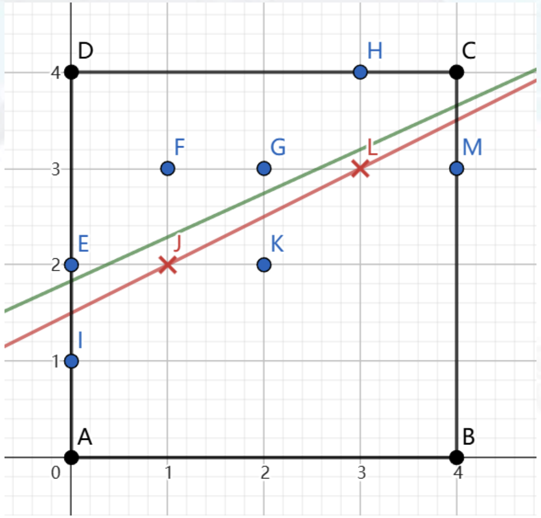
《平原》题解

Cage

暴力

对于 subtask 1，由于 $k<1$，我们有 $[kx+b]+1\geq[k(x+1)+b]$。所以可以先二分出 $[k\cdot 0+b]$ 的值。接下来不难用至多 V 次，将 $[kx+b],x\in[1,V]$ 的取值问出。

那如何求出 k,b 具体值？考虑寻找**单侧切线**。



我们希望找到如图所示的红色直线（点集单侧的切线）。

如果找到，将其向上平移 $\epsilon\approx\frac{1}{2V}$ 所得到的直线即为一条合法直线。

存在性证明：

求出上/下点集对应的凸包。我们将下凸包每条边，看作一条直线，这条直线与对应的上凸包是否交的情况，必然为：1…10…022…2。

其中 1 表示沿 x 正方向延长后与上凸包交，0 表示不与上凸包交，2 表示沿 x 负方向延长后与上凸包交。0 代表的即为一条单侧切线。

如果不存在 0，那么可以找到 1，2 分界点，可以发现此时上凸包中存在一条单侧切线。

暴力

当然对于 subtask 1，我们可以用一些更简单的方法通过。

由于**公切线**的存在性显然，我们可以找到公切线 L，假设其经过 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$。

接下来进行一些扰动：$(x_0, y_0 + \epsilon), (x_1, y_1 - \epsilon), \epsilon < \frac{1}{V^2}$，找到经过这两个点的直线。

由于此时 V 比较小，可以保证分母在 int 范围。

特殊性质

特殊性质：保证这条直线“差不多”是一条从原点出发的射线。

提供一个可以通过的做法：

- **<u>引理</u>**：直线集合 $L = \{l : y = \frac{u}{V^2}x + \epsilon\}$ 划分出所有点集的等价类。
- **<u>证明</u>**：$l_0 : y = kx + \epsilon$ 划分的点集和 $l_1 : y = \frac{\lfloor kV^2 \rceil}{V^2}x + \epsilon$ 划分的点集相同。$\left(k - \frac{\lfloor kV^2 \rceil}{V^2}\right)x < \frac{1}{V}$。

所以，我们去二分这个 u，每次 check 离这条直线最近的点。这个点可以使用 *Stern–Brocot* 树求出。

询问次数的上界为 $2\log_2 V$，可以通过。

分析

我们进一步分析在 subtask 1 中提到的凸包的性质。

有**<u>结论</u>**：上/下凸包至多有 $2\log_2 V$ 个点。

为什么？形如 $y=kx$ 的直线对应的上/下凸包至多有 $\log_2 V$ 个点。

<u>证明</u>：考虑凸包上的第一个点 (a,b)，必然满足 $a \ge \frac{V}{2}$，否则我们可以选择 $(2a,2b)$ 作为第一个点。
通过归纳不难得到 $\log_2 V$ 这个 bound。

那对于一般直线，我们可以通过平移变成两条形如 $y=kx$ 的直线，有 $2\log_2 V$ 的上界。

分析

所以，我们可以将原问题看成 $2\log_2 V$ 个特殊性质。（我们只关心在凸包上的点）

此时询问次数是 $O((\log_2 V)^2)$，时间复杂度是 $(\log_2 V)^3$ 可以通过 subtask 3,4。

随机化

基于上述的凸包的结构，作者实现了一种随机化。

大概是随机选取一个不在上/下凸包中的点，询问他是在上/下凸包，然后加入这个点。

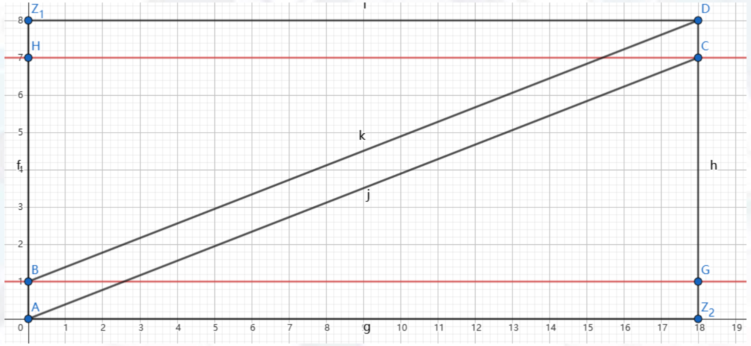
但似乎不在凸包中的点并不好找到，作者似乎不会快速的 sample，所以并未将其作为正解。

subtask 5 是给线性 sample 的做法。

subtask 6 是给$\sqrt{V}$ sample 的做法。

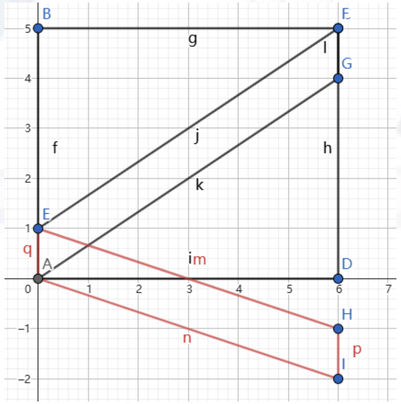
正解

首先二分出：$L(0) \coloneqq [k \cdot 0 + b], L(V) \coloneqq [k \cdot V + b]$。



这样，可以将直线 L 的解集限制在**平行四边形** $ABDC$ 中。假设此时对应的长宽分别为 n, m。

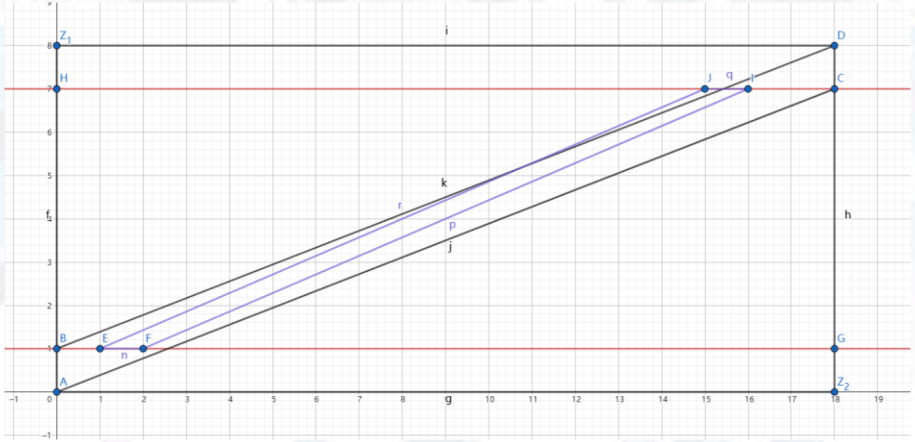
我们首先考虑压缩这个平行四边形。如果 $n < m$，我们做压缩的坐标变换，$(x, y) \to (x, y - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor x)$。可以发现，这个压缩变换是保平四内整点的。



特别的，如果 $\frac{n}{2} < m$，我们可以进一步压缩，$(x, y) \to (x, y - x)$，所以不妨假设 $m \le \frac{n}{2}$。

正解

二分出直线 L 交于红线的位置。（红线：过 B,C 引一条平行于 x 轴的直线）



如图中所示，直线 L与红线交于的 EF,JI。进一步，将解集限制在的紫色平行四边形中。

可以用类似欧几里得算法的想法，将 x,y 坐标**翻转**。

假设原先的长宽分别为 n,m, $n\le m$。
那么经过一次翻折后，新的长宽将会变为 $(m',n')\to(m',n' \bmod m')$ 其中 $n'\le n, m'\le m$。那么可以发现最小值每次减半，递归的次数是被 $\log_2(V)$ 控制的。

简单分析一下询问次数，一次二分的代价是：$\left\lceil \log_2\left(\frac{\mathrm{n_i}}{\mathrm{m_i}}\right)\right\rceil$，那么递归的总询问次数可以被控制在：

$$\sum_{i=1}^{k}\left\lceil \log_2\left(\frac{\mathrm{n_i}}{\mathrm{m_i}}\right)\right\rceil \le \sum_{i=1}^{k}\log_2(n_i)-\log_2(m_i)+1\le \log_2(V)+\log_2(V)=2\log_2(V)$$

那么总询问数将被 $2\log_2(V)+2\times 2\log_2(V)=6\log_2(V)$ 控制。

正解

如何求解答案?
可以求出询问的点集构成的上/下凸包（这应和前文所说的凸包相同），然后找到单侧切线。
如果粗糙的实现，那么递归时的**坐标变换**和找**单侧切线**的时间复杂度都是$O((\log_2 V)^2)$ 的。

这足以通过此题。

但实际上，坐标变换可以通过维护 $(x',y')=(ax,by)$ 的 a,b 来做到线性。
找单侧切线可以用双指针同样做到线性。（$\log_2 V$）所以可以做到 $O(\log_2 V \log\log V)$。

花絮

~~背景是上写作与沟通时得到的（x）~~

十分感谢 ltst，qlr 帮忙验题！！

很抱歉没能做到理论最优（$\log_2(V^4)$）。（如果有会的选手请教教我QxQ）

祝大家 **day2**，**day3** 取得好成绩！！！1