nim 游戏 解题报告

杜沛键

January 20, 2025

简要题意

给定一个长度为 n 的非负整数序列 a，求另一个非负整数序列 x 使得：

$$(a_1 + x_1) \oplus (a_2 + x_2) \oplus \cdots \oplus (a_n + x_n) = 0$$

且要求 $\sum x_i$ 最小。输出至多 m 种不同的方案。

数据范围：$1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 2 \times 10^4$。

算法一

- 我会 $n = 2$!

算法一

- 我会 $n = 2$!
- $k = |a_1 - a_2|$，方案一定只有一种。

算法一

- 我会 $n = 2$!
- $k = |a_1 - a_2|$，方案一定只有一种。

期望得分：4 分。

算法二

- 我会暴力枚举 a_i 的改变量!

算法二

- 我会暴力枚举 a_i 的改变量！
- 时间复杂度 $O(a_i^n)$，结合算法一期望得分 16 分。

算法二

- 我会暴力枚举 a_i 的改变量！
- 时间复杂度 $O(a_i^n)$，结合算法一期望得分 16 分。

- 思考思路：从高位到低位枚举，枚举到第 t 位选择若干个第 t 位不为 1 的数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{len_t}}$，将这些数第 t 位变成 1，并将更低的位全部变为 0。

算法二

- 我会暴力枚举 a_i 的改变量!
- 时间复杂度 $O(a_i^n)$，结合算法一期望得分 16 分。

- 思考思路：从高位到低位枚举，枚举到第 t 位选择若干个第 t 位不为 1 的数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{len_t}}$，将这些数第 t 位变成 1，并将更低的位全部变为 0。
- 贪心结论 I：在 $a_1 = 0$ 时，一定有 $len_t = 0/1$，取决于该为 1 的数量是否为偶数。

算法二

- 我会暴力枚举 a_i 的改变量！
- 时间复杂度 $O(a_i^n)$，结合算法一期望得分 16 分。

- 思考思路：从高位到低位枚举，枚举到第 t 位选择若干个第 t 位不为 1 的数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{len_t}}$，将这些数第 t 位变成 1，并将更低的位全部变为 0。
- 贪心结论 I：在 $a_1 = 0$ 时，一定有 $len_t = 0/1$，取决于该为 1 的数量是否为偶数。
- 可以在 $len_t = 1$ 的时候暴力枚举改变谁，时间复杂度 $O(\log^n(a_i))$，结合算法一期望得分 28 分。

算法三

- 贪心结论 II：为了使 k 最小，在第 i 位时一定会选择后 $i-1$ 位尽量大的 a_x 将改变。

算法三

- 贪心结论 II：为了使 k 最小，在第 i 位时一定会选择后 $i-1$ 位尽量大的 a_x 将改变。
- 故对于 $m=1$ 的情况可以按照这个贪心完成。时间复杂度 $O(n\log n)$。

算法三

- 贪心结论 II：为了使 k 最小，在第 i 位时一定会选择后 $i-1$ 位尽量大的 a_x 将改变。
- 故对于 $m=1$ 的情况可以按照这个贪心完成。时间复杂度 $O(n\log n)$。
- 结合算法一，算法二期望得分 40 分。

算法四

- 可以将贪心结论 II 进一步扩展。

算法四

- 可以将贪心结论 II 进一步扩展。
- 固定 k 时，在第 i 位时如果后 $i-1$ 位更大的 a_x 改变不可行，则更小的 a_y 也不可行。

算法四

- 可以将贪心结论 II 进一步扩展。
- 固定 k 时，在第 i 位时如果后 $i-1$ 位更大的 a_x 改变不可行，则更小的 a_y 也不可行。
- 由此我们可以得到一个搜索的思路：对于每一位按照更小位的大小排序（如果该位为 1 则设为 $-\inf$），并且按照从大到小的顺序搜索答案。搜索到不合法方案/方案已经被填满则返回。

算法四

- 可以将贪心结论 II 进一步扩展。
- 固定 k 时，在第 i 位时如果后 $i-1$ 位更大的 a_x 改变不可行，则更小的 a_y 也不可行。
- 由此我们可以得到一个搜索的思路：对于每一位按照更小位的大小排序（如果该位为 1 则设为 $-\inf$），并且按照从大到小的顺序搜索答案。搜索到不合法方案/方案已经被填满则返回。
- 时间复杂度 $O(n \log n \log(a_i) + m \log(a_i))$。结合算法一期望得分 72 分。

算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。

算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。
- 贪心结论 I（修改后）：当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时，可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择 $len_t = 2$。其他情况不变。

算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。
- 贪心结论 I（修改后）：当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时，可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择 $len_t = 2$。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案，我们在每一位若满足条件时选择一次 $len_t = 2$ 即可。其他情况不变。

算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。
- 贪心结论 I（修改后）：当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时，可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择 $len_t = 2$。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案，我们在每一位若满足条件时选择一次 $len_t = 2$ 即可。其他情况不变。
- 这样也就多一个 $\log(a_i)$ 的代价。最后总时间复杂度 $O(n \log n \log(a_i) + m \log^2(a_i))$。期望得分 100 分。

算法五

- 最后只需要考虑没有特殊性质 B 的情况。需要略微修改贪心结论 I。
- 贪心结论 I（修改后）：当 n 为奇数且存在某一位全为 1 时，可能会在更高的某一位 1 数量为偶数的地方选择 $len_t = 2$。其他情况不变。
- 所以不管是求 k 还是求方案，我们在每一位若满足条件时选择一次 $len_t = 2$ 即可。其他情况不变。
- 这样也就多一个 $\log(a_i)$ 的代价。最后总时间复杂度 $O(n \log n \log(a_i) + m \log^2(a_i))$。期望得分 100 分。
- 具体实现时可能会多一个 $\log$，但应该也能通过。