《冲刺》解题报告

题目大意

有一个点初始在 $(0,0)$，向右为 x 轴正方向，向上为 y 轴正方向，定义一次冲刺形如：

首先以 q 的概率向右移动一步，以 $1-q$ 的概率向上移动一步。

然后以 $(1-p)p^i$ 的概率向右上移动 $i+1$ 步，$i \geq 0$。

有 n 个，第 i 个草莓位于 (u_i, v_i)，如果在任意时刻经过了某个草莓，则视为获得该草莓。问经过充分多次冲刺后期望获得的草莓数量。

所有运算在 $\bmod P = 1004535809 = 479 \times 2^{21} + 1$ 意义下进行。

数据范围

对于所有测试点，$1 \leq n \leq 5000, 0 \leq u_i, v_i \leq 10^7, |u_i - v_i| \leq 5000, 0 \leq p, q < P, p \neq 1$。

记 $V = \max(\max_{i=1}^{n} u_i, \max_{i=1}^{n} v_i), b = \max_{i=1}^{n}\{|u_i - v_i|\}$。

子任务编号	$V \leq$	特殊性质	分数
1	300	无	5
2	5000	无	5
3	10^7	$p=0$	5
4	10^7	$q=0$	5
5	5×10^5	$b=0$	5
6	10^7	$b=0$	15
7	10^7	$b \leq 1$	10
8	5×10^5	无	10
9	5×10^6	$n \leq 3000$	25
10	10^7	无	15

解题过程

子任务 1

按题意模拟，注意当所处位置有一维超过草莓的坐标值域时可以直接结束，通过前缀和统计一个位置连续向右上 i 步经过的草莓数量，即可做到 $O(n+V^3)$，期望得分 5。

子任务 2

将坐标写成二元生成函数形式，记

$$
\begin{aligned}
F_0(x,y) &= \frac{1}{1-xy(qx+(1-q)y)\frac{1-p}{1-pxy}}(1+\frac{qx+(1-q)y}{1-pxy}) \\
&= \frac{1-pxy+qx+(1-q)y}{1-pxy-(1-p)xy(qx+(1-q)y)}
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{qx+(1-q)y}{1-pxy}$ 表示补上冲刺过程中的贡献，则经过点 (i,j) 的概率为 $[x^iy^j]F_0(x,y)$。变为求逆形式：

$$
\begin{aligned}
f_{i,j} = pf_{i-1,j-1} + (1-p)qf_{i-2,j-1} + (1-p)(1-q)f_{i-1,j-2} + a_{i,j} \\
a_{0,0} = 1, a_{1,1} = -p, a_{1,0} = q, a_{0,1} = 1-q
\end{aligned}
$$

即可做到 $O(V^2)$ 递推，期望得分 10。

子任务 $3,4,5$

考虑组合意义，相当于每次可以向右上走 $(1,1),(1,2),(2,1)$ 并乘上相应系数。对于 $p=0$ 或 $q=0$ 的情况，其中一种走法系数变为 0，只剩下两种走法，在位置确定时可以直接求出两种走法对应步数，使用组合数 $O(1)$ 计算即可。时间复杂度 $O(n+V)$。

对于 $b=0$，$(1,2)$ 与 $(2,1)$ 的步数相等，枚举这个步数即可确定 $(1,1)$ 的步数。由于需要组合数分配，可以通过一次卷积求出 $y=x$ 上所有点的答案，时间复杂度 $O(V\log V)$。结合子任务 2 期望得分 25。

子任务 $6,7,8,9,10$

为了方便，我们把分子变为 1，将一次查询 (u,v) 拆为四次对
$(u,v),(u-1,v),(u,v-1),(u-1,v-1)$ 的查询。

$$
F(x,y) = \frac{1}{1-pxy-(1-p)xy(qx+(1-q)y)} = \frac{F_0(x,y)}{1-pxy+qx+(1-q)y}
$$

考虑二元生成函数提取对角线，令 $G(x,y) = F(\frac{x}{y},y)$，则 $[x^ky^{b+k}]F(x,y) = [x^ky^b]G(x,y)$。

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \frac{1}{1-px-(1-p)x(\frac{qx}{y}+(1-q)y)} \\
&= \frac{y}{y-pxy-(1-p)x(qx+(1-q)y^2)} \\
&= \frac{y}{-(1-p)(1-q)xy^2+(1-px)y-(1-p)qx^2} \\
&= \frac{y}{-(1-p)(1-q)x(y-\xi_+)(y-\xi_-)}
\end{aligned}
$$

其中 ξ 为关于 y 的二次方程 $(1-p)(1-q)xy^2-(1-px)y+(1-p)qx^2=0$ 的两根。

$$
\xi_+ = \frac{(1-px)+\sqrt{\Delta}}{2(1-p)(1-q)x}, \xi_- = \frac{(1-px)-\sqrt{\Delta}}{2(1-p)(1-q)x}, \Delta = (1-px)^2-4(1-p)^2(1-q)qx^3
$$

注意 ξ_- 只含 x 的正数次幂项，ξ_+ 含常数项和 x 的负次幂项。设 $\alpha=\xi_-,\beta=\xi_+$。则 $\alpha,\beta^{-1}\in R[[x]]$

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \frac{y}{-(1-p)(1-q)x(y-\alpha)(y-\beta)} \\
&= \frac{1}{(1-p)(1-q)x(\beta-\alpha)}(\frac{\alpha}{y-\alpha}-\frac{\beta}{y-\beta}) \\
&= \frac{1}{(1-p)(1-q)x(\beta-\alpha)}(\frac{\alpha y^{-1}}{1-\alpha y^{-1}}+\frac{1}{1-\beta^{-1}y}) \\
b\ge 0, [y^b]G(x,y) &= \frac{1}{(1-p)(1-q)x(\beta-\alpha)\beta^b} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}\beta^b} \\
b< 0, [y^b]G(x,y) &= \frac{\alpha^{-b}}{(1-p)(1-q)x(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha^{-b}}{\sqrt{\Delta}}
\end{aligned}
$$

由于 α 最低为 x 的一次项，因此每有一个 y^{-1} 就至少有一个 x^1，$G(x,y)\in R[[x/y,y]]$，与 $F(x,y)\in R[[x,y]]$ 相符。所以上面的操作都是合理的。

值得一提的是，即使不分离部分分式，也可以通过下面的方法得到相同的结论，在考场上可能是一种更好想到的方法。尽管其中一步在 y 的次幂上出现了同时向正无穷和负无穷同时延伸的情况，在确定 ξ_1,ξ_2 前不一定符合洛朗级数的理论，但其结果仍是正确的。

$$
\begin{aligned}
b\ge 0, [y^b]G(x,y) &= [y^b]\frac{y}{-(1-p)(1-q)x(y-\xi_1)(y-\xi_2)} \\
&= [y^b]\frac{1}{\xi_2(1-p)(1-q)x(1-\frac{\xi_1}{y})(1-\frac{y}{\xi_2})} \\
&= \frac{1}{\xi_2(1-p)(1-q)x}[y^b](\sum_{i\ge 0}(\frac{\xi_1}{y})^i)(\sum_{j\ge 0}(\frac{y}{\xi_2})^j) \\
&= \frac{1}{\xi_2^{b+1}(1-p)(1-q)x}\frac{1}{1-\frac{\xi_1}{\xi_2}} \\
&= \frac{1}{\xi_2^b(1-p)(1-q)x(\xi_2-\xi_1)} = \pm\frac{1}{\xi_2^b\sqrt{\Delta}} \\
b<0, [y^b]G(x,y) &= \frac{\xi_1^{-b}}{(1-p)(1-q)x(\xi_2-\xi_1)} = \pm\frac{\xi_1^{-b}}{\sqrt{\Delta}}
\end{aligned}
$$

注意这里无法区分 ξ_+,ξ_-，可以通过代入 $[x^0y^0]G(x,y)=[x^0y^0]F(x,y)=1$ 得到 $\xi_1=\xi_-,\xi_2=\xi_+$。因此上式中的 $\pm$ 均取 $+$，代入发现过程同样在 $R[[x/y,y]]$ 上进行。

由于 b 较小，$O(V+b^2)$ 是一个可以接受的复杂度。如果使用多项式开根计算前 V 项 $\sqrt{\Delta}$，并对分母上的项全部通过多项式求逆变为分子，时间复杂度至少有 $O(V\log V)$，据常数不同以及其他部分的复杂度获得不同的分数。

优化到正解需要解决两个复杂度瓶颈：

一、求 $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$，注意 Δ 是一个三次多项式。考虑求导：

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{\sqrt{\Delta}})' &= -\frac{\Delta'}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \\
(\frac{1}{\sqrt{\Delta}})'\Delta &= -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Delta'
\end{aligned}
$$

可以 $O(V)$ 递推。如果使用多项式开根，时间复杂度为 $O(V\log V)$。

二、求 ξ_+^{-b} 与 ξ_-^b。

注意 $ax^2+bx+c=0$ 的一根 ξ_+ 与 $cx^2+bx+a=0$ 的一根 λ_- 互为倒数。因此

$$
\xi_+^{-1}=\lambda_-=\frac{1-px-\sqrt{\Delta}}{2(1-p)qx^2}
$$

可以维护分子为 $A+B\sqrt{\Delta}$ 的形式，每乘一个 ξ_+^{-1} ，分子会变为 $A(1-px)-B\Delta+(B(1-px)-A)\sqrt{\Delta}$。使用同样的方法处理 ξ_-^b 。分母可以写为 $kx^b\sqrt{\Delta}$ 的形式，所以实际对 $\frac{A}{\sqrt{\Delta}}+B$ 进行查询。

注意 A,B 的次数只有 $O(b)$，每次查询可以直接枚举 A 中的项，时间复杂度 $O(nb+b^2)$。如果使用多项式求逆，直接维护分子，时间复杂度可能达到 $O(bV\log V)$。

总时间复杂度 $O(V+nb+b^2)$，可以通过所有测试点。如果不能在 $O(V)$ 内递推 $\sqrt{\Delta}$，只能通过子任务 8，如果不会将分子表示为 $A+B\sqrt{\Delta}$ 的形式，或者通过其他方法得到类似结论而不能拓展到 b 更大的情况，如通过 BM 算法结合找规律求递推式，只能通过子任务 $6,7$。如果写正解被卡常，仍可以通过除子任务 10 外的所有子任务。

参考资料

Jack Hsieh, *A Technique for Bivariate Main Diagonal Extraction*, 2021