题目描述

构造一组 n 位格雷码，使得每一位作为不同位的次数极差最小。

$1 \le n \le 25$。

解题过程

算法一

对于 $n \le 5$，我们可以暴力搜索格雷码，加上一定剪枝之后可以通过。

可以通过前 5 个测试点，得到 20 分。

算法二

忽略极差最小的条件。

格雷码的构造是非常经典的问题，我们可以从一组 n 位格雷码推出一组 $n+1$ 位格雷码。

对于一组 n 位格雷码，定义其对应的**变化序列**为一个长度为 2^n 的正整数序列。对 $1 \le i < 2^n$，序列的第 i 个数为第 i 个二进制串和第 $i+1$ 个二进制串不同的位。第 2^n 个数表示第一个串与最后一个串不同的位。为方便，接下来将直接用此序列描述对应的格雷码。

设一组 n 位格雷码对应的变化序列为

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2^n}$$

则容易证明

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2^n-1}, n+1, a_{2^n-1}, a_{2^n-2}, \cdots, a_1, n+1$$

是一组格雷码。

可以通过前 3 个测试点，并得到其余测试点的 20% 分数，共 29.6 分。

结合算法一，可以得到 36 分。

算法三

考虑仍旧使用递推方法，但我们要调整每个数在变化序列中的出现次数，来使得出现次数极差最小。

如何调整？注意到在之前的构造中，a_{2^n} 出现了 0 次，其他数都出现了 2 次。

这启发我们，把 a 序列分成若干段，如果每段末尾的数的出现次数比其余数少一定值，就可以通过合理分配分段点来调整每个数的出现次数。

然而经过笔者的一些尝试，这个思路下似乎并不存在从 n 位格雷码推导出 $n+1$ 位格雷码的方案。然而，可以构造从 n 位格雷码推导出 $n+2$ 位格雷码的方案。

具体来说，设一组 n 位格雷码被分成 m 段（m 为奇数），第 i 段为 A_iP_i，其中 P_i 为该段末尾元素，A_i 为该段其他元素构成的序列（可能为空）。整个变化序列表示为

$$A_1P_1A_2P_2 \cdots A_mP_m$$

则

$$
\begin{aligned}
&A_1, n+1, A_1^R, n+2, A_1, P_1, \\
&A_2, n+2, A_2^R, n+1, A_2, P_2, \\
&\cdots \\
&A_m, n+1, A_m^R, n+2, A_m, \\
&n+1, A_m^R, P_{m-1}, A_{m-1}^R, \cdots, P_1, A_1^R, n+2
\end{aligned}
$$

是一组格雷码。其中，A_i^R 表示 A_i 反转之后的序列。

这样，对于 $1 \le i \le m$，A_i 中的所有元素都出现 4 次。对于 $1 \le i < m$，P_i 出现 2 次。P_m 不出现。

于是我们只需要合理选取 P_i 的位置，就能得到出现次数满足要求的 $n+2$ 位格雷码。

经过试验，该算法可以通过所有 $n \le 25$ 的测试点，可以得到满分。

参考资料

[CSP-S2019] 格雷码