

《Classical Counting Problem》解题报告

南京市中华中学 翟鹏昊

题目大意

给定一棵 n 个节点的无根树，你可以做如下操作若干次：

- 选择当前树上编号最大或最小的点，删去它和以它为一个端点的所有边，保留任意一个连通块作为操作后的树。

令 min 为树上所有节点编号的最小值， max 为树上所有节点编号的最大值， $size$ 为树上的节点个数，则一棵树的权值为 $min \cdot max \cdot size$ 。求所有能通过上述操作得到的非空的树的权值和，对 2^{32} 取模。

数据范围：

对于所有数据，有：

- $1 \leq T \leq 10^5$ ，所有数据 n 的和不超过 10^5 。
- 时间限制：3s
- 空间限制：1024MB

子任务：

子任务编号	特殊性质	分值
1	$n \leq 10$	5
2	$n \leq 20$	10
3	$n \leq 100$	10
4	$n \leq 2000$	15
5	$n \leq 3 \times 10^4$	15
6	给定的树中，每个节点的度数 ≤ 2	20
7	无	25

算法一

记录每个点是否存在，跑状压 dp，复杂度 $O(2^n \text{poly}(n))$ ，期望通过子任务 1, 2，如果实现的不好只能通过子任务 1。

期望得分 5 ~ 15 分。

算法二

将算法一写成记忆化搜索的形式，会发现通过了子任务 3 甚至子任务 4。

实际上，状态总数量是 $O(n^2)$ 级别的，枚举 min 和 max ，然后只保留 $[min, max]$ 之间的节点，如果 min 和 max 在同一个联通块中，我们就找到了一个联通块。容易发现这样能找出所有合法的联通块。

暴力实现，复杂度 $O(n^3)$ ，期望通过子任务 1, 2, 3，得分 25。

如果固定 min 后，不断将节点 $min, min + 1, min + 2, \dots, n$ 加入，用并查集维护，复杂度变为 $O(n^2)$ ，期望通过子任务 1, 2, 3, 4，得分 40。

如果你是卡常大师，有希望通过子任务 5，得到 55 分。

算法三

尝试简化一下问题：

- 选择当前树上编号最大的点，删去它和以它为一个端点的所有边，保留任意一个连通块作为操作后的树。

回想一下点分树的构造方法：

- 选择树的重心作为根，删去这个点后，对每个联通块分别递归建树，作为根的子树。

将“重心”改为“编号最大的点”，建树后，每个子树都是能构造出的联通块。

按 $1, 2, \dots, n$ 的顺序从小到大加入节点，用并查集维护，即可在 $O(n)$ 的时间内完成建树，记这棵树为 T ，记 $T(u)$ 表示 T 中 u 的子树中的点集。

类似的，将“编号最大”改为“编号最小”，再建立一棵树，记这棵树为 S ，记 $S(v)$ 表示 S 中 v 的子树中的点集。

观察到，一个最小点为 min ，最大点为 max 的联通块，可以看成 $T(max) \cap S(min)$ 。

为了避免数重，需要满足 $min \in T(max), max \in S(min)$ 。

枚举 min ，如果节点 $u \in S(min)$ ，则在 T 上把 u 染成黑色；如果 $u \notin S(min)$ ，则在 T 上把 u 染成白色。

节点 min 对答案的贡献是： $min \times (\sum_{u \text{ 是黑点}, min \in T(u)} u \times (T(u) \text{ 中黑点的个数}))$ 。

先考虑如何在支持将单点颜色反转的情况下，能对于每个 min 查询

$(\sum_{u \text{ 是黑点}, min \in T(u)} u \times (T(u) \text{ 中黑点的个数}))$ ，对 T 树剖后能转化成如下问题：

- 有序列 a, b, c ， a 初始给定， b, c 初始为 0，需要支持：
 1. 给 b 的一个区间加上 1。
 2. 将 c 的一个位置异或 1。
 3. 求区间的 $a_i \times b_i \times c_i$ 之和。

- 只需要在线段树上维护：区间 $a_i \times c_i$ 之和，区间 $a_i \times b_i \times c_i$ 之和，同时用 lazy tag 表示区间内整体 b_i 的增量，合并下传 lazy tag 是容易的，pushup 也是容易的。

考虑原问题，定义 $dfs(u)$ 表示：“求解 $S(u)$ 中所有节点的贡献，并将 $S(u)$ 中所有节点染黑”的过程。

在 $dfs(u)$ 中，先对于所有 u 的轻儿子，递归调用 dfs ，然后暴力将这个轻子树的所有点变成染白，然后对于重儿子调用 dfs ，然后暴力将所有轻子树的节点染黑，然后将 u 染黑，在 T 上查询一下就行。

总共的染色操作次数和查询操作次数是 $O(n \log n)$ ，复杂度 $O(n \log^3 n)$ ，期望通过所有子任务，得分 100。

如果实现的常数特别大，只能通过子任务 1, 2, 3, 4, 5，得分 55。

总结

本题难度适中，选手需要通过简化问题等手段，一步一步发现问题的性质。完成问题的转化后，需要通过不是很简单的数据结构去维护。同时通过部分区分了不同复杂度的代码，提升了区分度。

本人认为，本题考察能力全面，贴合 OI 的风格，区分度正常，是一道不可多得的好题。

参考资料

- 本题是一道原创题，无参考资料。

致谢

- 感谢江苏省锡山高级中学的陶孜铖和我讨论问题和解法。
- 感谢集训队选手陈诺、葛致远、孙培轩、叶李蹊、赵海鲲（按姓名拼音排序），精英培训选手许淇文，参与本题的验题工作。