《生命的循环》解题报告

长沙市长郡中学 杨鑫和

目录

1 题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的带权有向图，保证图中任何简单回路[1]边权之和 $\le B$，设 $f(t,x)$ 表示是否存在一条 $1 \to t$ 边权和为 x 的途径[2]，求最小的正整数 p，使得 $\exists M, \forall x \ge M, f(n,x) = f(n,x+p)$，即 $f(n,x)$ 在 x 充分大时的周期。答案对 10^9+9 取模。

之后我们在讨论 $f(n,x)$ 的取值过程中，均默认 x 已经充分大。即序列 $f(n,x)$ 裁去了前 W 个位置，满足 W 充分大且 $\operatorname{lcm}(1,2,3,\ldots,B)|W$。

2 数据范围

对于所有数据满足 $2 \le n \le 5000, 0 \le m \le 10^4, 1 \le u_i, v_i \le n, 0 \le w_i \le B \le 100$。

子任务 1 (1 分): 神经构成的有向图是一张 DAG，即不存在任何简单回路。

子任务 2 (8 分): $n, B \le 10, m \le 15$。

子任务 3 (11 分): 原图强连通。即任意一对神经节点间都可以通过神经组成的有向路径互相可达。

子任务 4 (10 分): 存在至少一条包含点 n 的简单回路。

子任务 5 (19 分): 所有的简单回路点集互不相交，且总长度两两互质。

子任务 6 (9 分): 所有的简单回路点集互不相交，且总长度均为质数的若干次幂。

子任务 7 (18 分): $B \le 30$。

子任务 8 (24 分): 无特殊限制。

[1]简单回路：一个首尾相接的有向边序列，满足所有边的终点互不相同。

[2]途径：一个可以重复的有向边序列，满足每条边的终点是下一条边的起点。

3 解题过程

3.1 子任务 1

该子任务保证原图是一张有向无环图。

注意到必须要存在一条回路才能无限延长一条途径，而图中没有任何回路，所以 $f(n, x)$ 恒为 0，输出周期 1 即可。

3.2 子任务 2

该子任务保证 $n, B \le 10, m \le 15$。

注意到任意一条途径总是可以拆成一条简单路径和若干条简单回路，考虑延长现有的有向途径构造。设一条长度为 L 的途径与 c 条简单回路相交，设 c 条简单回路长度分别为 $l_1, l_2, \ldots, l_c$。由于简单回路的部分可以分别重复任意多次，利用裴蜀定理容易证明，当 x 充分大时，途径总长度可以延长取到 $x \equiv L \pmod{\gcd(l_1, l_2, \ldots, l_c)}$ 的所有 x。以下我们称一条途径的 $\gcd(l_1, l_2, \ldots, l_c)$ 为该途径的周期。

由于图中简单回路长度最多为 B，所以一条途径的周期也 $\le B$，因此 $F_B = \operatorname{lcm}(1, 2, 3, \ldots, B)$ 一定是 $f(n, x)$ 的一个周期。利用矩阵快速幂/动态规划等手段模拟足够多轮后，提取 $f(n, x)$ 的一个长度为 F_B 的区间，其最小整周期就是答案。

3.3 子任务 3

该子任务保证原图强连通。

由强联通性，我们可以构造出一条途径经过所有的顶点，因此我们可以使用所有的简单回路延长这条路径。由子任务 2 中的分析，我们可以知道强连通图的答案就是所有简单回路长度的 gcd。同时由于所有回路可以分解成简单回路，所以问题亦即求所有回路长度的 gcd。

考虑如下算法：取出原图任意一颗以 1 为根的外向生成树，记 dis_u 表示只经过树边 $1 \to u$ 的路径总长度。我们断言，对于所有非树边 e，$w_e - (dis_{v_e} - dis_{u_e})$ 的 gcd 就是所有回路长度的 gcd。

我们可以从两方面说明上述结论。设答案为 g，上式结果为 d。

一方面首先有 $d|g$，因为对于任何一条简单回路 C，有 $d|\sum_{e\in C} w_e - (dis_{v_e} - dis_{u_e})$，可以推出 $d|\sum_{e\in C} w_e$。

另一方面由强联通性，存在 $v \to 1$ 的一条途径，这条途径和 $1 \to v$ 的长度为 dis_v 的途径组成了一条回路。由 g 的定义这条回路的长度是 g 的倍数。此时 $w_e - (dis_{v_e} - dis_{u_e})$ 在模 g 意义下同余于 $u \to v$、$v \to 1$、$1 \to u$ 拼接成的一条回路，长度同样是 g 的倍数，因此有 $g|d$。

综上所述 $d = g$，该算法可以求出正确结果。时间复杂度 $O(n + m)$。

由于周期大小 $\leq B$，利用 bitset 优化暴力递推可以 $O(\frac{mB}{\omega})$ 找到经过一个点的所有回路长度 gcd，同样可以通过。注意需要处理零权回路的问题。

3.4 子任务 4

该子任务保证存在一条简单回路经过 n。

考虑如何利用子任务 3 中分析出来的性质，我们首先对有向图进行 SCC 缩点。对于图中的每一个 SCC，我们运行子任务 3 中的算法求出其中所有回路长度的 gcd。

设 x 所在 SCC 所有的回路长度 gcd 为 g_x。此时，由于任何到达 n 途径必然经过点 n，所以答案一定是 g_n 的因子。

由于 $g_n \leq B$，从 1 开始进行记忆化搜索，对于每一个点 x，得到一个长度为 g_n 的数组 $vis_{x,r}$ 表示是否存在 $1 \to x$ 的途径长度在模 g_n 意义下同余于 r。答案即是 vis_n 数组的最小整周期。

3.5 子任务 5

该子任务保证所有简单回路无交，且长度两两互质。

首先与子任务 4 中的处理相同，我们先执行 SCC 缩点找出线性地每一个 SCC 的周期；利用子任务 3 提到的 bitset 做法也可以在 $O(\frac{nmB}{\omega})$ 的时间内完成这一步。

接下来我们枚举 $t = 1, 2, \ldots, B$ 从点 1 开始记忆化搜索，求出数组 $S'_{x,t,r}$ 表示是否存在 $1 \to x$ 的途径长度模 t 余 r。接下来从每个周期非零的 SCC 开始记忆化搜索，当搜索进入另一个 SCC 时将当前的 t 与当前 SCC 的周期取 gcd，求出数组 $S_{x,t,r}$ 表示是否存在 $1 \to x$ 的途径周期为 t，长度模 t 余 r。注意第二步搜索时只能从 $S'_{x,t,r} = 1$ 的状态开始搜索。

我们可以发现，最终 $f(n, x)$ 形态形如对于每个 t 将 $S_{x,t}$ 复制无穷份拼接起来，所有串的按位或，我们对 $S_{x,t}$ 所有位置取反转化为按位与。此时我们的问题就完全转化为了一个数论问题，在模一些给定的数 t 的情况下，余数只可能属于给定的集合。求满足该条件的解的结构（循环节）。

接下来的所有子任务开始时我们都需要运行上述算法求出取反后的 $S_{x,t}$，之后不再复述该过程。

对于 $S_{n,t,r} = 1$，如果满足 $\exists k, f(n, kt + r) = 1$，我们就称 $S_{n,t}$ 的第 r 位是有效的。在本子任务中，所有周期 t 是两两互质的，如果不存在 $S_{n,t}$ 所有位置都是 0，那么所有为 1 的位置都是有效的。我们可以对于每一个 t 任取一个 r 满足 $S_{n,t,r} = 1$，由中国剩余定理可知可以解出一个位置 x 满足所有的 $x \equiv r \pmod t$，有效性得证。

现在我们考虑对串 $S_{n,t}$ 做压缩操作，对于每一个串求出其最小整周期 t'，将 $S_{n,t'}$ 与 $S_{n,t}$ 的前缀取与后忽略原来的 $S_{n,t}$。此时所有有用的周期 t 要么是 1，要么两两互质。如果 $S_{n,1,0}$ 为假直接输出 1，否则我们断言答案等于剩余所有周期的 lcm。

设答案为 T，如果 $f(n, x)$ 存在更小的周期 T'，有 $T' | T$，由于 T 是所有剩余周期的最小公倍数，所以存在一个周期 t 满足 $t \nmid T'$。由压缩的过程，我们已经排除了存在全 0 串的情况，因此 $S_{t,r}$ 所有位置都有效。那么对于 $S_{n,t,r} = 1$，我们找到 k 满足 $f(n, kt + r) = 1$，由周期 $f(n, kt + r + T') = f(n, kt+r) = 1$，所以 $S_{n,t,(r+T') \bmod t} = 1$。此时 $S_{n,t}$ 具有一个大小为 $\gcd(T', t)$ 的周期，与我们已经将 $S_{n,t}$ 压缩到最小整周期矛盾！

3.6 子任务 6

该子任务保证所有简单回路无交，且长度都是质数的若干次幂。

本子任务与子任务 5 之间的区别在于周期 t 之间可能由互相整除的关系，我们考虑如何去除这种关系。

对于两个周期 t', t 满足 $t'|t$，将 $S_{n,t'}$ 复制 $\frac{t}{t'}$ 次，拼接起来之后与 $S_{n,t}$ 求与，然后忽略 $S_{n,t}$。重复上述过程直到所有的 t 两两互质或者出现全 0 串，然后套用子任务 5 的结论即可。

3.7 子任务 7

该子任务保证 $B \leq 30$。

考虑当 t 不满足两两互质的性质时，存在部分满足 $S_{n,t,r} = 1$ 实际上是无效的。因为去除无效的位对答案没有任何影响，而去除所有无效的位之后，套用子任务 5 最后一部分的分析，对所有周期进行压缩之后所有周期的 lcm 就是答案。问题转化为判断每一个位的有效性。

一个位有效，当且仅当将其所属的周期对应的 01 串只保留这一个位置为 1 之后仍然存在至少一组解。所以有效性判定可以转化为多次有解性判定，我们先考虑如何进行有解性判定。一个简单的想法是暴力，枚举 x 从 1 枚举到模数的 lcm 所有整数，检验 x 是否满足同余条件。

注意到模数两两互质的情况下有解性判定是极其简单的，我们考虑如何把一般的问题往模数两两互质的情况转化。定义小质数 p 为满足 $p^2 \leq B$ 的质数，大质数则相反。我们考虑结合暴力算法，只暴力枚举 x 在模小质数的若干次方意义下的结果。在 $B \leq 30$ 的情况下，就是枚举 x 在 $I = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 = 10800$ 意义下的结果 r'。设 $x = yI + r'$，对于原同余方程，形式现如 $yI + r' \equiv r \pmod t$，由一次线性同余方程的分析方法，该方程可以转化为一个关于 y 的、模数为 $\frac{t}{\gcd(t,I)}$ 的方程。注意到 $\frac{t}{\gcd(t,I)}$ 要么是大质数要么是 1，有解性容易判断。

接下来考虑到对于每一个位置判定其有效性，时间复杂度较高，但是我们可以考虑全局枚举 x 对 I 取模后的结果，然后整体维护所有位置的有效性，复杂度可以接受。

3.8 子任务 8

该子任务无特殊性质。

考虑子任务 6 提示我们，如果模数之间要么互质要么整除，依然是可以快速解决有解性问题的。因此我们不一定需要枚举小质数的所有幂次。考虑对于所有小质数的幂次折半，在 $B \leq 100$ 的情况下，枚举模 $I = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$ 意义下的结果。注意到此时 $\frac{t}{\gcd(t,I)}$ 要么是大质数，要么是小质数的若干次方，套用子任务 6 的做法判定有解性。

可以发现该做法同样能通过全局枚举模 I 意义下的结果优化复杂度，如果仍然暴力枚举每一位判断有效性，则只能获得子任务 7 之前分数。

综上所述，我们得到了一个时间复杂度为 $O((n + m + I)B^2)$ 的做法，进而解决了整个问题。

4 命题思路

本题改编自 2024“钉耙编程”中国大学生算法设计超级联赛第四场的一道赛题《矩阵的周期》。这一道题相当于本题 $n \leq 60$，边权均为 1 且需要对于每一对点都输出答案的版本。原题给出的官方解法是注意到过少的点数、过小的边权构造不出足够大的环，因此答案的上界比较小，通过恰当的手段对矩阵进行递推之后利用 KMP 算法找出最小周期。这个做法没有足够深入到问题的本质，存在进一步思考的空间。

我在做这一道赛题时没有注意到答案较小的性质，仔细分析之后很快将其转化成了上述的数论问题，然后猜测对同余方程进行压缩之后的最小公倍数就是答案（即子任务 5 中的想法）。进行一定对拍之后，我发现了该结论的错误之处，并引入了“有效性”的概念，修正并证明了原结论。

在研究如何判定一个位置的有效性的过程中，我发现这需要的方法与我在 NOI 赛前的训练中遇到过的一道来源于 ICPC2019 WF 的试题《Traffic Blights》颇为类似，便有了正解中枚举答案在模 $I = 2520$ 意义下余数的想法。

5 参考资料

1. https://oi-wiki.org/graph/concept/

2. 子任务 3 处部分证明参考：
https://www.cnblogs.com/JCY-std/p/17497579.html

3.《矩阵的周期》题目提交网址：
https://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=7478

4.《Traffic Blights》题目提交网址：
https://www.luogu.com.cn/problem/P6261

6 致谢

本题想法诞生之初，曾与来自长沙市长郡中学的集训队选手周桓毅同学、来自杭州市学军教育集团文渊中学的周康阳同学关于本题的做法有过一定的讨论。

来自长沙市长郡中学的程楷轩同学、杨岱谦同学参与了本题的验题工作，并提出了改进意见。

感谢以上同学的宝贵帮助。