出题人：刘海峰。

题目大意

对于一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 A（下标从 1 开始，下同），定义一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 B 的是好的当且仅当：

1. 对于第 i $(1 \le i \le n)$ 行，不存在 $1 \le j, k \le m, j \ne k$ 同时满足 $A_{i,j} = B_{i,k} = 1, A_{i,k} = B_{i,j} = 0$。
2. 对于第 i $(1 \le i \le m)$ 列，不存在 $1 \le j, k \le n, j \ne k$ 同时满足 $A_{j,i} = B_{j,i} = 1, A_{k,i} = B_{k,i} = 0$。

对于一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 A，有一个 $n \times m$ 的 01 矩阵 B，初始 B 的所有位置都是 0，每次可以选择 B 中若干个等于 0 的位置，将它们同时变成 1，要求做完操作之后 B 矩阵仍然是好的。设最多能操作 k 次，则矩阵 A 的权值为 k。

现在有一个 $N \times N$ 的 01 矩阵 M，由于 N 很大，所以 M 由特殊的方式生成。

初始 M 中所有位置均为 0，然后有 Q 次操作，每次操作给定 x_1, x_2, y_1, y_2，对于所有位置 (i, j) 满足 $x_1 \le i \le x_2, y_1 \le j \le y_2$，将 $M_{i,j}$ 变成 $1 - M_{i,j}$。

设 $S_{i,j}$ 为 M 前 i 行前 j 列构成的子矩阵的权值。

给定询问参数 $op \in \{0, 1\}$，若 $op = 0$ 则输出 $S_{N,N}$，若 $op = 1$ 则输出 $S_{N,1}, S_{N,2}, \cdots, S_{N,N}$。

数据范围

Subtask 编号	分值	$N \le$	特殊性质
1	5	4	A
2	10	50	A
3	10	5000	A
4	10	5000	无
5	15	2×10^5	B
6	15	2×10^5	A
7	35	2×10^5	无

特殊性质 A：保证 $op = 0$。

特殊性质 B：定义一次操作的代价为 $(x_2 - x_1 + 1) \times (y_2 - y_1 + 1)$，则所有修改操作代价之和 $\le 2 \times 10^6$。

对于所有数据，保证 $1 \le N, Q \le 2 \times 10^5, 1 \le x_1 \le x_2 \le n, 1 \le y_1 \le y_2 \le n, op \in \{0, 1\}$。

题解

算法 0

我会暴力。

（好像要写一个状压 dp）

可以通过 Sub 1，期望得分：5 分。

可能可以通过一些神奇优化通过 Sub 2。

算法 1

考虑把这个奇怪判定条件对应到图上面。

具体的，考虑一个左侧 n 个点，右侧 m 个点的有向二分图。

如果 $A_{i,j}=1$ 则左侧 i 连向右侧 j，如果 $A_{i,j}=0$ 则右侧 j 连向左侧 i。

于是考虑把 $B_{i,j}$ 对应到左侧 i 到右侧 j 的连边的边权。

观察一下判定条件，发现合法当且仅当对于两条边 i,j 满足 i 的终点和 j 起点相同，那么 i 的权值 $\leq j$ 的权值。

考虑一个图该如何计算答案。

发现我们只关注强连通分量个数以及在强连通分量内部的边数。

暴力建图即可，复杂度 $O(N^2)$，可以通过 Sub 1~3，期望得分：25。

算法 2

直接建图复杂度无法接受，考虑图的特性。考虑对这个图跑缩点。

首先对于两个点，如果它们连出去的点集完全相同，那么我们可以认为这两个点完全相等，并删掉其中一个点以及其对应的连边。不断进行合并直到没有完全相等的点。

做完这个操作之后，我们可以证明，跑出来缩点后的图拓扑序唯一，换句话讲，存在一种排列强连通分量的方式使得后一个强连通分量存在边连向前一个强连通分量，也就是说，现在变成了一条链。

证明的话，考虑删点求拓扑序的过程中，如果存在某一时刻有两个强连通分量入度为 0，首先这两个强连通分量一定是同侧单点（如果不是单点，就存在至少两种颜色，那么这两个强连通分量之间就有连边了）此时这两个点都连向了没被删的异侧，所以这两个点完全相等，于是矛盾。

当然，刚才说的“删点”的过程比较麻烦，其实我们也不需要非得按照这个过程做。考虑如何快速处理这些东西，或者说如何快速处理出图的每一个强连通分量信息。

考虑兰道定理。

事实上我们可以只关注每个点的出度。

首先把左右侧的所有点分别按照出度从小到大排序。

我们发现链的一个前缀一定是左侧点的一个前缀和右侧点的一个前缀构成的点集。

并且合法当且仅当度数之和 $=$ 左侧点数 $\times$ 右侧点数。

暴力枚举 x,y，单次复杂度 $O(n^2)$。

实际上单次复杂度可以达到 $O(n)$，这个思路来源于王孜研同学：

设 d_i 表示左侧第 i 个点的度数。

性质：如果 $d_i > d_j$，则 i 能够到达 j。

我们将左右侧的点排序之后出度大的往出度小的连（在本题中，相等的话可以随便钦定一个顺序），然后就变成了一般竞赛图问题了。

可以通过 Sub 1~4 和 Sub 6，期望得分：50 分。

算法 3

因为 d_i 变化非常复杂，可能在只考虑前面若干列时 $d_i > d_j$，之后又会出现 $d_j > d_i$，所以考虑对于每一对 (i,j) 求出第一次 $d_i \neq d_j$ 时 d_i, d_j 的大小关系。

首先找出对应两行的最长公共前缀，在这一段里面两个点都互相不能到达，然后比较下一位，大的那一个此时可以到达小的那一个。其实这是一个比较字典序的过程。相当于是把矩阵每一行按照字典序排序即可。

用主席树维护字符串哈希即可 $O(n\log^2 n)$ 完成排序，事实上，用类似 SA 的思路或者分治均可以做到 $O(n\log n)$，不过后者常数过大再加上不是本题重点所有出题人选择了 $O(n\log^2 n)$ 的做法。

然后每次加入右侧的点的时候用线段树求一下连出去的点中排名最大的和连进来的点中排名最小的，做一个类似区间覆盖的数据结构（出题人用的是并查集）维护即可。

总复杂度 $O(n\log^2 n + Q\log n)$，期望得分：100。

总结与致谢

出题背景

本题 idea 源于 [「2021 集训队互测」这是一道集训队胡策题]，出题人在做这题时想到了图论的做法，并发现和题解做法本质相同但该做法更有前途，于是通过大量改造变成了本题。

其实出题人本来想出：对于 $op=1$，输出 $S_{1,1}, S_{2,2}, \cdots, S_{n,n}$ 的，但这样做法本质是相同的，但代码长了不少（可以看出来，出题人很良心）所以改成了求 $S_{n,1}, S_{n,2}, \cdots, S_{n,n}$。

这题数据比较难造，所以出题人的造法比较笨拙，大部分数据基本都是前半部分弄成一条链，后半部分随一些区间进行覆盖，但会存在一个问题：如果链是随机的，那么区间覆盖的时候很难（或者说，需要大量操作）造出短区间。如果会更优秀的造法欢迎和出题人联系。如果本题有更优秀的做法的话也欢迎和出题人交流，QQ：3401902314。

参考资料

「2021 集训队互测」这是一道集训队胡策题

兰道定理，百度百科

致谢

感谢方心童，郑钧同学在本题命制过程中参与验题工作。

感谢王孜研同学提供了本题基于兰道定理的快速做法。