NOI 2024 Day1 A. 集合

RP

2024 年 7 月 18 日

问题（集合）

- 给定长度为 n，值域为 m 的集合序列 A 与 B。
- q 次询问对于区间 $[l, r]$，是否存在一个排列 p 满足：

$$p \circ [A_l, \ldots, A_r] = [B_l, \ldots, B_r].$$

数据范围：$n \le 2 \times 10^5$，$m \le 6 \times 10^5$，$q \le 10^6$。

- 声明：本题做法诸多，其中有对各种信息进行哈希维护的方式。出题人未对任何合理的哈希方式做任何针对性构造。

- 声明：本题做法诸多，其中有对各种信息进行哈希维护的方式。出题人未对任何合理的哈希方式做任何针对性构造。
- 这里提供一种正确性可以证明的解法。

- $m \leq 5$

- $m \le 5$
- 考虑枚举所有 $1 \sim m$ 的排列 p:

- $m \le 5$
- 考虑枚举所有 $1 \sim m$ 的排列 p:
- 若每次询问时枚举，复杂度 $O(qnm!)$，期望得分：$40 \sim 50$；

- $m \le 5$
- 考虑枚举所有 $1 \sim m$ 的排列 p：
- 若每次询问时枚举，复杂度 $O(qnm!)$，期望得分：$40 \sim 50$；
- 若在询问前枚举，求出所有极长的合法区间，然后判断询问区间是否位于某一个极长区间内，复杂度 $O(nm! + qn) \sim O(nm! + q)$，期望得分：$50 \sim 60$。

- 考虑如何判断两个序列是否等价。

- 考虑如何判断两个序列是否等价。
- 可以复合一个排列相当于不区分元素 $1 \sim m$。

- 考虑如何判断两个序列是否等价。
- 可以复合一个排列相当于不区分元素 $1 \sim m$。
- 这启发我们从每个元素的角度去思考。

- 考虑如何判断两个序列是否等价。
- 可以复合一个排列相当于不区分元素 $1 \sim m$。
- 这启发我们从每个元素的角度去思考。
- 对每个元素分析：只有出现位置是重要的。

- 考虑如何判断两个序列是否等价。
- 可以复合一个排列相当于不区分元素 $1 \sim m$。
- 这启发我们从每个元素的角度去思考。
- 对每个元素分析：只有出现位置是重要的。
- 因此两个序列等价当且仅当 所有元素出现位置的集合 构成的集合相等。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。
- 一个正确性有保证的集合哈希方式：选定 B 与 $O(n^2)$ 级别的大素数 P，令 $f(S) = \left(\sum_{x \in S} B^x\right) \bmod P$。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。
- 一个正确性有保证的集合哈希方式：选定 B 与 $O(n^2)$ 级别的大素数 P，令 $f(S) = \left(\sum_{x \in S} B^x\right) \bmod P$。
- 正确性等价于 01 序列哈希。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。
- 一个正确性有保证的集合哈希方式：选定 B 与 $O(n^2)$ 级别的大素数 P，令 $f(S) = \left(\sum_{x \in S} B^x\right) \bmod P$。
- 正确性等价于 01 序列哈希。
- 于是内外层集合哈希选定不同的 B, P 即可保证正确性。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。
- 一个正确性有保证的集合哈希方式：选定 B 与 $O(n^2)$ 级别的大素数 P，令 $f(S) = \left(\sum_{x \in S} B^x\right) \bmod P$。
- 正确性等价于 01 序列哈希。
- 于是内外层集合哈希选定不同的 B, P 即可保证正确性。
- 直接用莫队维护所有询问的哈希值可以做到 $O(n\sqrt{q}) \sim O(n\sqrt{q}\log n)$，期望得分：$80 \sim 90$。

- 考虑用两层集合哈希进行判断。
- 一个正确性有保证的集合哈希方式：选定 B 与 $O(n^2)$ 级别的大素数 P，令 $f(S) = \left(\sum_{x \in S} B^x\right) \bmod P$。
- 正确性等价于 01 序列哈希。
- 于是内外层集合哈希选定不同的 B, P 即可保证正确性。
- 直接用莫队维护所有询问的哈希值可以做到 $O(n\sqrt{q}) \sim O(n\sqrt{q}\log n)$，期望得分：$80 \sim 90$。
- 注意到所有合法的区间有单调性，因此直接双指针预处理出所有合法的区间，时间复杂度 $O((n+q)\log n) \sim O(n+q)$，期望得分：$100$。

- Bonus：上述哈希依赖于两个序列询问的区间 $[l, r]$ 相同，若询问区间不同，应如何处理？

- Bonus：上述哈希依赖于两个序列询问的区间 $[l, r]$ 相同，若询问区间不同，应如何处理？
- Hint：从维护位置变为维护相对位置。