士兵游戏题解

中山大学 欧梓洋

题意

- 给你一颗一颗以1为根的树，其余节点i的父亲为i/h(i)，其中h(i)为i的最小质因子。
- 问所有点对的距离和。
- $n \le 10^{10}$

- 这题本来是有一个“士兵游戏”的故事背景的，不过在出好之后才发现题目背景和转化后的模型并不是完全等价。最终题目就变成了现在这个没怎么包装过的模型。

45pts

- 对于一个树统计点对间的距离，只需要知道每一颗子树的大小。线性筛出每个点最小的质因子即可计算答案。
- 不过要稍微注意一下空间问题。

70pts

- 基本上所有优于线性复杂度的做法都可以通过。
- 比如说质数个数*除法分块分界线的复杂度。

分析

- 我们把数字写成质数相乘的形式，质数之间从小到大排序
- 如12=2*2*3,18=2*3*3
- 可以发现，它的父亲就是删去最前面的一个质数。
- 两个数的lca就是他们的最长公共后缀。

分析

- 考虑对于每一个质数算他的贡献。
- 即公共后缀贡献为0，两个数剩下的部分贡献为1
- 比如
- $x = 2^2 * 3 * 5, y = 2 * 3^2 * 5$
- 此时2的贡献为(1+2)
- 3的贡献为|1-2|
- 5的贡献为|1-1|，也可以说是没有贡献。

对于>$\sqrt{n}$的质数

- 因为每一个数最多只会包含一个大质数，因此大质数一定位于乘积末尾。若两个数同时含有一个大质数则不产生贡献，如果大质数只存在于一个数中，则会产生1的贡献。

$$ans_1 = \sum_{p=\sqrt{n}+1}^{n} [p\text{是质数}]\lfloor \frac{n}{p} \rfloor \left(n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor\right)$$

- 分块+min25筛

对于<$\sqrt{n}$的质数

- 首先先假设全部都是正贡献

$$ans_2 = \sum_{p=2,\, p\text{是质数}}^{\sqrt{n}} \sum_{c \,|\, p^c \le n} \lfloor \frac{n}{p^c} \rfloor \cdot n$$

- 这部分的复杂度$\sqrt{n}$

对于<$\sqrt{n}$的质数

- 对于一个质数p_j，如果两个数比该质数大的质因子都相同，那么就要去减去该质数产生的贡献。
- 枚举p_j的指数c，比p_j大的部分x，记$dp_{i,j}$表示1到i中，最大质因子不超过p_j的有多少个。（特别的，x允许为1）
- 即

$$ans_3(j) = \sum_{c \mid p_j^c \le n} \sum_{x=p_j+1,\, x\text{的最小质因子}>p_j}^{\lfloor \frac{n}{p_j^c} \rfloor} dp^2_{\lfloor \frac{n}{p_j^c \cdot x} \rfloor, j}$$

对于<$\sqrt{n}$的质数

- 先计算x不为1的部分。

$$ans_3(j)=\sum_{c\,|\,p_j^c\le n}\ \sum_{x=p_j+1,\,x\text{的最小质因子}>p_j}^{\lfloor\frac{n}{p_j^c}\rfloor} dp^2_{\lfloor\frac{n}{p_j^c\cdot x}\rfloor,j}$$

- 对x进行分块，这时我们需要知道分块区间内合法的x有多少个。
- 不难发现，这个信息和min25筛质数过程中维护的数组是一样的，在枚举j的维护即可。
- 枚举c的复杂度，可以看到随着c增加，内部循环的上界会除p。复杂度原本的$\sqrt{n}$变成$\sqrt{\frac{n}{p}}$，当p大于4的时候已经缩小为一半。

对于<$\sqrt{n}$的质数

- 先计算x不为1的部分。
- 考虑如何计算$dp_{i,j}$表示1到i中，最大质因子不超过p_j的有多少个。
- 有转移

$$dp_{i,j} = dp_{i,j-1} + dp_{\frac{i}{p_j},j}$$

- i只需要记录所有n除法分界线的位置答案即可。

对于<$\sqrt{n}$的质数

- 先计算x不为1的部分。

$$ans_3(j) = \sum_{c \mid p_j^c \le n} \sum_{x=p_j+1,\, x\text{的最小质因子}>p_j}^{\lfloor \frac{n}{p_j^c} \rfloor} dp^2_{\lfloor \frac{n}{p_j^c \cdot x} \rfloor, j}$$

- 因为c至少为1，x比p大，因此对于一个j来说，我们需要知道的i的范围不超过$\frac{n}{{p_j}^2}$。随着j的增加，所需要i的范围只会越来越小。
- 也就是对于一条整除分块分界线$\frac{n}{m}$，仅会在${p_j}^2 \le m$的时候枚举到，可以发现和min_25筛的形式是一样的。

对于<$\sqrt{n}$的质数

- x=1的部分，此时我们需要知道的是$dp_{\frac{n}{p_j},j}$

$$dp_{i,j} = dp_{i,j-1} + dp_{\frac{i}{p_j},j}$$

- 对于每一个质数，额外枚举比他大的质数转移。
- 此处的复杂度为($\sqrt{n}$内质数个数)^2
- 1e5内质数个数约有9600个，可以通过
- Bouns：这部分更优秀的做法？

- 谢谢