《建设终末树》解题报告

一、题目大意与数据范围

把 m 个物品（设它们组成的集合为 S）放到一棵 n 个点的树（设为 $T=(V,E)$）的一些结点上（两个物品可以被放在相同的结点）。

我们称一个点集 $V'\subseteq V$ 的「导出」$f(V')\subseteq E$ 为其中任意两点在树上最短路径的并。

设第 i 个物品放在的结点是 a_i，放置的方案需要满足如下两种限制。

- 对于每个物品 i，给定一个连通块 $T_i=(V_i,E_i),T_i\subseteq T$，需要满足 $a_i\in V_i$。
- 给出 q 个二元组 $P_j=(V_j,S_j)$，其中 $V_j\subseteq V,S_j\subseteq S$，你需要满足 $f(V_j)\cap f(\{a_k|k\in S_j\})=\emptyset$，即 V_j 的「导出」与 S_j 中所有物品所在结点的「导出」交集为空，**注意二者都是边集**。

判断是否能够放置物品使得满足限制，并给出一组放置方案。

对于所有数据，满足 $3\le n,m\le 2000,0\le q\le 5\times 10^5$,
$0\le\sum|V_j|,\sum|S_j|\le 5\times 10^5,2\le|V_j|,|S_j|\le\min(n,m,50)$。

子任务 1（10 分）：树是一张菊花图，即它的直径长度为 2。
子任务 2（15 分）：$n,m\le 10,\sum|V_j|,\sum|S_j|\le 20$。
子任务 3（20 分）：$n,m\le 500,q\le 5\times 10^3,|V_j|,|S_j|=2$，树是一条链，即它的直径长度为 $n-1$。
子任务 4（20 分）：$n,m\le 500,\sum|V_j|,\sum|S_j|\le 10^4$。
子任务 5（25 分）：$\sum|V_j|,\sum|S_j|\le 10^5$。
子任务 6（10 分）：无特殊限制。

二、解题思路

下文中，我们将 T_i 称为第 I 类限制，P_j 称为第 II 类限制。

子任务 1

题面里写着的“不对劲”就是这个：如果所有 I 类限制有一个公共点，就可以把所有物品都放在这个点上。

考虑不经过重心的限制，显然只能是 I 类限制，并且只有一个点，因此固定下来。

然后考虑固定下来的这个点与根的连边，经过这条边的 II 类限制会固定另外一些点。

这个过程中判一下矛盾，剩下的只要把所有点都放在重心就好了。

子任务 2

暴力搜索。

子任务 3

把题目要求改写为：构造 m 个整数 $x_i \in [l_i, r_i]$，和 q 条限制形如 $x_i = x_j \vee \max(x_i, x_j) \le l \vee \min(x_i, x_j) \ge r$。

记录状态 $f(i,j)$ 表示 $[x_i < j]$，则一个 x_i 可以被 $[x_i < j+1][\neg(x_i < j)]$ 唯一确定。

考虑 2-SAT，在此基础上能够刻画两类限制：

I 类限制可以表示为，$f(i, l_i) = \text{false}, f(i, r_i + 1) = \text{true}$。
II 类限制可以表示为，$f(i,k) = f(j,k), \forall l < k \le r$。

每次暴力连边，复杂度 $O(nm + qn)$。

子任务 4

考虑拓展链的做法，给每条边定向，将每一个“点在树上”的限制变成“点是内向树的根”。

只需要构造限制使得方案一定是一棵内向树，“一个点不能同时存在两条出边”这个限制是充要的。

具体来说，每条边会在一个方向上被统计，所有点总出度数为 $n-1$，又有每个点出度数不超过 1，显然最终会有 1 个零出度点和 $n-1$ 个一出度点，并且每个点都能够是根。每次去掉一个有出度的叶子显然可以将树删空。

我们现在有 m 个物品，也就是说有 m 个模型，所以总共变量数是 $(n-1) \times m$ 的，记 u 号点度数是 deg_u，则约束数是 $m \sum \frac{(deg_u)(deg_u - 1)}{2} \le m \times n^2$ 的。

I 类限制可以刻画为：规定某个模型中一些边的方向。
II 类限制可以刻画为：对于某些边，规定某些模型中这条边的方向必须相同。

二者都可以在 2-SAT 模型中刻画，I 类限制的约束数总共是 $O(nm)$ 的，每个 II 类限制约束数是 $O(|S_j|n)$ 的，总共的复杂度为 $O(n^2 m + n \sum |S_j|)$。

数据没有特意去卡满 $n^2 m$ 的部分。

子任务 5, 6

“一个点不能同时存在两条出边”限制可以使用前后缀连边优化，将约束数优化到 $O(nm)$。

II 类限制使用并查集维护，用重链剖分+线段树可以优化到 $O(\sum|S_j||V_j|\log^2 n)$ 的时间复杂度，完全跑不满。

也可以点分治做到 $O(nm\log n+\sum|S_j||V_j|)$，在实际测试中没有上一种做法快。

子任务 5 是为了防止有人被卡常的。

三、参考资料与后记

在本题命制的过程中，和与本次互测无关的吴作同有过一次讨论。

数据没有对任何随机化做法做出针对性构造。