《化学实验》解题报告

华东师范大学第二附属中学　柯怿憬

1　题目描述

实验室中有 n 种试剂，编号分别为 $1, 2, \cdots, n$，其中试剂 i 的危险程度为 i。你正在进行化学实验，但现在，你不知道任何化学反应。接下来发生了 q 个事件，每个事件为以下两种形式之一：

`1 x y`：你知道了如何通过化学反应使试剂 x 与试剂 y 互相转化。

`2 x y`：你现在只有试剂 x，求有多少试剂 x' 满足，你可以用试剂 x 通过若干反应生成试剂 x'，且反应过程中产生的所有试剂的危险程度均不超过 y。

由于你很急切地想要知道实验结果，所以询问将强制在线。

2　输入格式

第一行：三个整数 t, n, q。

接下来 q 行：每行三个整数 op, x_0, y_0，表示一个事件 `op x y`，其中 $x = (x_0 - 1 + t \times lastans) \bmod n + 1$，$y = (y_0 - 1 + t \times lastans) \bmod n + 1$，$lastans$ 为上一次询问的答案（不存在则为 0）。

3　输出格式

对于每个 $op = 2$ 的事件，输出一行一个整数，表示答案。

4 数据范围

对于所有数据，满足 $t \in \{0,1\}$，$1 \le n, q \le 5 \times 10^5$，$op \in \{1,2\}$，$1 \le x_0, y_0 \le n$。当 $op = 1$ 时，$x \ne y$；当 $op = 2$ 时，$x \le y$。

<table>
<tr><th>子任务编号</th><th>分值</th><th>$n \le$</th><th>$q \le$</th><th>$t =$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>7500</td><td>7500</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>15</td><td>5000</td><td rowspan="3">10^5</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">20</td><td rowspan="2">10^5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">5×10^5</td><td rowspan="2">5×10^5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>15</td><td>1</td></tr>
</table>

5 解题过程

5.1 算法一

题意等价于支持在线加边，询问保留一段前缀的点，查询某一个点所在连通块的大小。

直接暴力，每次询问时遍历所有合法的边，计算答案。时间复杂度为 $\mathcal{O}(q^2)$，可以通过子任务 1，期望得分 10。

5.2 算法二

考虑维护这张图的点 Kruskal 重构树，不妨设初始时所有点均与 $n+1$ 相连。每次加边时，观察 Kruskal 重构树的形态如何变化。若加了边 (u, v)，设 w 是 u 与 v 在 Kruskal 重构树上的最近公共祖先，可以发现，Kruskal 重构树的变化是，先将 u 到 v 路径上的边删除，再将 w 到 u 的链与 w 到 v 的链按点的编号归并起来，形成一条新的链，将相邻的点间连边。

可以维护 fa_u 表示 Kruskal 重构树上 u 的父节点，以及 sz_u 表示 u 的子树大小，加边时以 $\mathcal{O}(\mathrm{dis}(u, v))$ 的复杂度归并，询问时不断跳父节点，时间复杂度为 $\mathcal{O}(nq)$，可以通过子任务 1、2。期望得分 25。

5.3 算法三

考虑用 Link-Cut Tree 维护 Kruskal 重构树，加边时将两条需要归并的链变为实链，与它们相邻的边变为虚边。设这两条链分别为 $A_1,\cdots,A_p$ 和 $B_1,\cdots,B_q$，将它们归并得到 $C_1,\cdots,C_{p+q}$。将 C 划分为 k 个极长连续段 $[l_i,r_i]$，使得 $C_{l_i},\cdots,C_{r_i}$ 在归并前属于同一个序列，则使用平衡树相关操作容易做到以 $\mathcal{O}(k\log n)$ 的复杂度归并这两条链。

下面证明所有操作中 k 的总和是 $\mathcal{O}((n+q)\log n)$ 的。

定义整棵树的势能为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\log(fa_i-i)$，初始时势能为 $\mathcal{O}(n\log n)$。只需证明一次操作中势能至少减少 $\Omega(k)-\mathcal{O}(\log n)$。

设两条链 $A_1,\cdots,A_p$ 和 $B_1,\cdots,B_q$ 归并得 $C_1,\cdots,C_{p+q}$ 的 k 个极长连续段为 $[l_i,r_i]$。设 $d_i=C_{r_i}-C_{l_{i+1}}$，则势能的变化量为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k-1}\log(C_{r_i}-C_{l_{i+1}})-\sum_{i=1}^{k-2}\log(C_{r_i}-C_{l_{i+2}})+\mathcal{O}(\log n)\\
\le&\sum_{i=1}^{k-1}\log d_i-\sum_{i=1}^{k-2}\log(d_i+d_{i+1})+\mathcal{O}(\log n)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}(\log d_i+\log d_{i+1}-2\log(d_i+d_{i+1}))+\mathcal{O}(\log n)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}\log\frac{d_id_{i+1}}{(d_i+d_{i+1})^2}+\mathcal{O}(\log n)\\
\le&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}\log\frac{1}{4}+\mathcal{O}(\log n)\\
=&\mathcal{O}(\log n)-\Omega(k)
\end{aligned}
$$

因此时间复杂度为 $\mathcal{O}\left((n+q)\log^2 n\right)$，可以通过所有子任务，期望得分 100。

6 总结

本题考查了 Link-Cut Tree 等数据结构以及时间复杂度的计算等方面的知识点，较为基础。

限于笔者能力，仍有以下问题未能解决：

- 是否能构造数据使得复杂度达到 $\Theta\left((n+q)\log^2 n\right)$（即达到上界）？
- 是否能证明复杂度为 $\mathcal{O}((n+q)\log n)$？
- 归并两条链时使用启发式合并的复杂度是否仍为 $\mathcal{O}\left((n+q)\log^2 n\right)$？

欢迎有兴趣的读者继续研究。

7 参考资料

本题出题过程中有过与集训队员柯绎思的讨论。