



插线板

清华大学 彭天翼

题目描述

- N个点的树
- 每个节点由3个小节点构成
- 树上的每条边是9条边，代表3个小节点之间的两两的电阻
- 求某两点之间的电阻

对于所有的测试数据，输入保证是一棵树。 $0 < \text{输入中电阻的倒数} \leq 10$ 。

+

测试点编号	特点
1~6	$n \leq 100, q \leq 1000$ ，保证输入中只有查询没有修改
7~10	$n \leq 1000, q \leq 1000$ ，保证数据是一条链
11~16	$n \leq 10000, q \leq 10000$ ，保证树的高度不超过 30
17~20	$n \leq 10000, q \leq 10000$

+

电路的基尔霍夫矩阵

- 设第*i*个点的电势为 u_i
- $G_{ij} = 1/R_{ij}$
- $G_{ii} = -\sum_{j=1}^n G_{ij}$
- 则 $G \cdot U = I$
【 U 是一个 $n \times 1$ 的矩阵，表示*i*点的电势】
- 【 I 是一个 $n \times 1$ 的矩阵，表示从外界流入该点的电流】

- 如果假定某点的电势为0
 - 则删掉G矩阵的一行一列，剩下的矩阵一定满秩（可逆）
 - 联想生成树计数
-
- 求出G的逆矩阵G'
 - 即 $U = G' \cdot I$

- 如何求两点之间的电阻?
- 加压求流:
 - 在两个点之间加一个1伏特的电源
 - 求出经过该电源的电流, 则两点之间电阻 = $1 / I$
- 加流求压
 - 或者设电流为1, 求出两点之间的电势差 x , 则电阻 = $x / 1$

- 即：I矩阵的Ix,Iy不为0, 求U矩阵Ux和Uy的差
- $U = G' I$
- 询问复杂度 $O(1)$

- 得分：30分

考虑链型情况

- 6端网络的G矩阵?
- 网络中只有6个点和外界连边。
- 因为G矩阵的本质是n个方程， $2n$ 个未知数
- 所以确定了网络中连向外界的点的 u ，则外界流入的 i 也确定了，并且是线性关系?
- 一个6端网络用一个 $6*6$ 的矩阵描述

- 6端G矩阵的可合并性?
- 按分块矩阵联立方程
- $U1 = \{u1,u2,u3\}$, $U2 = \{u4,u5,u6\}$
- $I1 = \{i1,i2,i3\}$, $I2 = \{i4,i5,i6\}$
- $A*U1 + B*U2 = I1$
- $C*U1 + D*U2 = I2$

树形情况

- 维护子树的电路信息：3端网络
- 3*3的矩阵
- 一个儿子的合并：将3端变成6端，合并以后再解出新的3端关系
- 多个儿子的合并：直接将3端矩阵相加就行了

维护

- 同时维护子树和链的信息
- 用动态树

补充

- 1. 树中的一个节点的6端网络是不满秩的（决定了I不一定决定了U）
- 2. G矩阵是一个对称矩阵，可以优化常数
- 3. 6个电压真的能决定6个电流么？用分块矩阵+连通矩阵可逆证明
- 4. 我们能不能换成一侧的3个电流和3个电势决定另一侧的3个电流和3个电势？有可能出现不满秩的情况：例如，两个大节点之间任意两个小节点都连1欧姆的电阻

致谢

- 1. 谢谢提供了出题idea，讨论与指导，并帮忙写了check的范浩强同学
- 2. 谢谢参与讨论和正在写check的罗雨屏同学
- 3. 谢谢想帮忙写check的陈立杰同学
- 4. 谢谢通宵不断电的紫荆2号楼308寝室