

蓄水池

【算法1】

$O(nq)$ 暴力模拟，期望得分30分。

【算法2】

考虑若某一时刻水量是 x ，我们经过了某次加水或用水的操作，水量变成了 $f(x)$ ，考虑考察 $f(x)$ 是怎样的一个函数。

现在先考虑 $c = 10^9$ 的情况，这时可以看作没有上界。

那么一次加水操作的 $f(x) = x + k$ ，用水操作的 $f(x) = \max(0, x - k)$

注意我们可以把加水操作写成 $f(x) = \max(0, x + k)$ ，因为这并不影响。

问题就变成了给定很多 $f_i(x) = \max(0, x) + b_i$ ，每次修改一个 f_i ，或者询问 $f_p(f_{p-1}(\dots f_1(x)\dots))$

观察到一个性质，若 $f(x) = \max(a, x) + b$ ， $g(x) = \max(c, x) + d$ ，那么

$$f(g(x)) = \max(a, \max(c, x) + d) + b = \max(a - d, \max(c, x)) + b + d = \max(\max(c, a - d), x) + b + d$$

注意合并后的函数依然是 $f(g(x)) = \max(p, x) + q$ 的形式，所以这种函数是可以合并的，所以我们考虑使用线段树维护这些函数的合并。

对于线段树上一个代表 $[l, r]$ 的节点，保存一个 $f_r(f_{r-1}(\dots f_l(x)\dots)) = \max(p, x) + q$ ，注意到根据上面的式子，可以快速 pushup，又因为只有单点修改，所以可以做到 $O(n \log n)$ ，结合暴力期望得分50分。

【算法三】

考虑有上界的函数是否也可以表示成这样方便合并的形式，答案是肯定的，考虑一类函数 $f(x) = \min(\max(x, L), R) + D$ ，考虑其合并。

$f(x) = \min(\max(x, L), R) + D$ ， $g(x) = \min(\max(x, l), r) + d$ ，则

$$f(g(x)) = \min(\max(\min(\max(x, l), r) + d, L), R) + D = \min(\max(\min(\max(x, l), r), L - d), R - d) + D + d$$

由于 $\min(\max(x, y), z) = \max(\min(x, z), \min(y, z))$ ，所以可以继续化简

$$f(g(x)) = \min(\min(\max(\max(x, l), L - d), \max(r, L - d)), R - d) + D + d = \min(\max(x, \max(l, L - d)), \min(R - d, \max(r, L - d))) +$$

发现已经是原来的形式，故和算法二一样使用线段树维护即可，期望得分100分。