

命运

清华大学 交叉信息研究院 杨天祺

清华大学 交叉信息研究院 李嘉图

题意

- ▶ 给定一棵有根树
- ▶ 树上额外有一些返祖边
- ▶ 你需要将每条树边黑白染色
- ▶ 要求满足每条返祖边覆盖的链中至少有一条边被染成了黑色
- ▶ 求方案数

分数分布

- ▶ $= 100$: 70人
- ▶ ≥ 72 : 96人
- ▶ ≥ 48 : 148人
- ▶ ≥ 40 : 203人

- ▶ < 16 : 29人

自由吐槽



人口普查

- ▶ 暴力枚举 2^{n-1} 种染色方案
- ▶ 复杂度: $O(2^n \cdot nm)$ 或 $O(2^n \cdot (n + m))$
- ▶ 得分: 16分

m 很小?

- ▶ 容斥!
- ▶ 枚举有哪些返祖边的限制不满足
- ▶ 复杂度: $O(2^m \cdot n)$
- ▶ 得分: 24分

m 很小

- ▶ 仔细写出容斥的式子
- ▶ 将每一条返祖边的限制看成树上的一条链，对于一个返祖边的集合 S ，记 $|\cup_{p \in S} p|$ 为 S 中所有链的并上边的条数
- ▶ 则

$$ans = \sum_S (-1)^{|S|} \cdot 2^{n-1-|\cup_{p \in S} p|}$$

- ▶ 发现我们只关心 $|\cup_{p \in S} p|$
- ▶ 动态维护树上链并

- ▶ 复杂度： $O(2^m \cdot m \log n + n)$
- ▶ 得分：32分

m 很小

- ▶ 其实根本不用这么麻烦
- ▶ 只有返祖边的端点是关键点.....
- ▶ 建个虚树跑就好了

- ▶ 复杂度: $O(2^m \cdot m + n)$
- ▶ 得分: 40分

▶ 容斥的做法好像没有办法再扩展到 m 大的情形了.....

换种思路——树形DP

- ▶ 考虑以 i 为根的子树还未确定染色方案，而其余边颜色全部确定的情况，可以注意到此时的染色方案数只与 i 到根路径上最近的黑边位置有关。
- ▶ 记 $dp_{i,j}$ 表示以 i 为根的子树还未确定染色方案，而 j 是最小的满足 i 的第 j 个祖先和第 $j+1$ 个祖先之间为黑边的数，的情况下的染色方案数。
- ▶ 转移方程

$$dp_{i,j} = \prod_{v \in ch(i)} (dp_{v,j+1} + dp_{v,0})$$

- ▶ 需要把不满足 i 为下端点的返祖边的限制的情况判掉
- ▶ 复杂度: $O(n \cdot depth)$
- ▶ 得分: 48分
- ▶ 结合虚树可以得到72分

优化?

- ▶ 把答案相同的区间合并起来
- ▶ 用平衡树维护区间
- ▶ 启发式合并

- ▶ 复杂度: $O(n \log^2 n)$ 或 $O(n \log n)$
- ▶ 得分: 72~100分
- ▶ 结合虚树可以得到88~100分

优化!

- ▶ 发现只需要支持区间加 (从 $dp_{v,0}$ 转移)、区间赋零 (判掉不合法的情况)、单点查询
- ▶ 线段树合并维护即可
- ▶ 复杂度: $O(n \log n)$
- ▶ 得分: 100分

欢迎提问