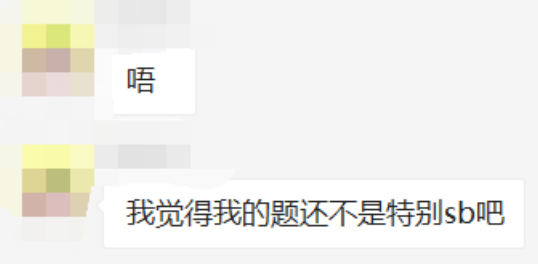
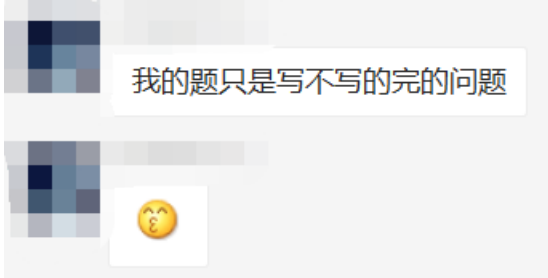
劈配 解题报告

清华大学 王聿中（Yazid） 张瑞喆

前言·Yazid的问候

- 大家好！又见面了！
- Yazid带着绿绿、Zayid、DuckD向各位选手致以清明佳节的问候~
- 不知在座各位此时心情如何。





- 不知各位看了这两张图心情又如何。
- 本题作为今天唯一的良心送分小水题，你AC了吗？

题目名字的由来

- 一开始，这道题叫《导师选择》。
- 直到后来我渲染了一下Day2的题面，发现这个题目的名字和整个画风格格不入。
- 于是Yazid就改了这个名字。
- （还提示了算法，是不是很良心）

题目大意

- 有n位选手和m位导师，每位导师战队有容量限制b_i。
- 每位选手有一张志愿表。对于每位选手，导师之间允许并列（最多允许C位导师并列）。
- 所有选手有一个排名，选手之间不允许并列。
- 导师录取的规则可以简单概括为：对每位选手，在优先满足更高位选手的前提下，尽可能满足该选手最高位志愿。
- 每位选手有一个理想的志愿s_i（梦想），表示他希望被s_i或更高位的志愿录取。
- 求：

1. 每位选手的最终录取情况。
2. 每位选手至少要上升几名，才能被理想的志愿录取（实现梦想）。

暴力点

- 测试点1（$n \leq 10$，$m = 1$，$C = 1$）：只有一位导师，送10分。

- 测试点2（$n \leq 10$，$m \leq 2$，$C \leq 2$，$s_i = m$）：
- 共有2名导师。选手分为4类：博爱类（将两位导师填入同一志愿），偏爱类（将两位导师填入不同志愿），偏执类（只填了一为导师），弃疗类（顾名思义）。
- $s_i = m$意味着不用计算第二小问，第一小问特判判判即可。

- 前3个测试点（$n \leq 10$，$m \leq 3$，$C \leq 3$）：
- 枚举每位选手录取的导师，判合法性并维护字典序最大的解即可。
- 第二小问？枚举每位选手上升的名次！复杂度$O(n^{m+2})$

针对C=1且bi=1的算法·20分

- 测试点数据规模：$m \le n \le 200$，$C = 1$，$b_i = 1$
- 对于$C = 1$这一限制，我们很容易发现它事实上规定了：在选手的志愿表中，导师不允许并列。
- 限制本题无法直接贪心的事实上就是导师允许并列的规则。于是我们考虑贪心。
- 由于$b_i = 1$，因此所有导师最多招收一名选手，我们可以用布尔数组记录每位导师是否已经招收学员。然后按排名从高到低处理所有选手，对于一名选手，从高到低判断其各志愿，直到其被录取。
- 上面的算法可以求出第一小问的所有答案。对于第二小问，我们只需要二分答案（或枚举答案）并转到第一小问进行验证即可。
- 枚举答案的复杂度：$O(n^4)$（期望应该只能通过$n \le 100$的点？）
- 二分答案的复杂度：$O(n^3 \log n)$

针对C=1的算法·50分

- 测试点数据规模：$m \le n \le 200$，$C = 1$
- （从这页开始，为了表述方便，我们假设n, m同阶）
- 对于$C = 1$这一限制，我们很容易发现它事实上规定了：在选手的志愿表中，导师不允许并列。因此，对于每一志愿，决策是唯一的。
- 然后按排名从高到低贪心即可求解第一小问。
- 对每位选手，二分答案（或枚举答案）并转到第一小问进行验证即可求解第二小问。
- 枚举答案的复杂度：$O(n^4)$（期望应该只能通过$n \le 100$的点？）
- 二分答案的复杂度：$O(n^3 \log n)$

针对C=1的算法·更优的算法

- 事实上，对于这部分数据，我们可以做到$O(n^3)$的时间复杂度。
- 第一小问的复杂度是$O(n^2)$，所以瓶颈显然在第二小问。
- 对于选手i，如果他的排名上升至k，我们只需要关心前$k-1$名的志愿是否会发生变化即可。
- 对于选手i：我们把他的前s_i志愿中的导师全部取出来，并用一个数组记录这些导师战队的剩余名额。
- 接着按之前的贪心策略求解前$i-1$名的录取志愿，并同时维护这个数组。当这个数组为全0时，可知当前不合法，立刻可以求得答案。

数据分治·70分

- 利用数据分治我们可以获得70分。

针对bi=1的做法·30分

- 测试点数据规模：$m \le n \le 200$，$C \le 10$，$b_i = 1$

- 不难发现，此时问题转化为二分图匹配。考虑动态加边。
- 按排名高到低处理所有选手。对于每位选手，按志愿从高到低依次加入各导师的边并增广，直到增广成功为止。
- 第二小问二分答案即可。
- 复杂度：$O(f(n, n^2) n \log n)$。其中$f(n, m)$表示的是$O(n)$个点$O(m)$条边的二分图跑匹配的复杂度。
- 一个简单的小优化：对于一名选手的某一志愿，如果**增广失败**，则删去这些边。这可以使**理论**复杂度变成$O(f(n, nC) n \log n)$

正解1·匈牙利精致版

- 如果你在前面$b_i = 1$的算法中使用了匈牙利算法进行匹配，那么我们考虑如何让他适配没有特殊限制的情况。
- 匈牙利算法的瓶颈在于你不能匹配一个点多次。一个很自然的想法是将每个导师暴力拆成b个点，而显然是不行的。
- 然而，我们考虑每次增广时需要用到的新点：每个导师的点只会被用到**最多**1个，因此我们对每个导师可以只保留1个未匹配的额外节点。
- 在一次增广结束后，如有导师的额外节点被匹配，且该导师未满流，我们就为其新增一个额外节点，并连上一些需要的边（这需要你维护一些信息，但它们并不复杂）。
- 考虑这样做节点数、边数的量级：每次匹配成功会增加1个节点、n条边，最多匹配成功n次，因此点数是$O(n)$的，边数是$O(n^2)$的。
- 因此总复杂度是$O(f(n, n^2)n \log n)$的，其中$f(n, m) = nm$。

正解1·匈牙利精致版?

- 如果你在前面$b_i = 1$的算法中使用了匈牙利算法进行匹配，那么我们考虑如何让他适配没有特殊限制的情况。
- 匈牙利算法的瓶颈在于你不能匹配一个点多次。一个很自然的想法是将每个导师暴力拆成b个点，而显然是不行的……吗？
- 然而，我们考虑每次增广时需要用到的新点：每个导师的点只会被用到**最多**1个，因此我们对每个导师可以只保留1个未匹配的额外节点。
- 在一次增广结束后，如有导师的额外节点被匹配，且该导师未满流，我们就为其新增一个额外节点，并连上一些需要的边（这需要你维护一些信息，但它们并不复杂）。
- 考虑这样做节点数、边数的量级：每次匹配成功会增加1个节点、n条边，最多匹配成功n次，因此点数是$O(n)$的，边数是$O(n^2)$的。
- 因此总复杂度是$O(f(n, n^2)n \log n)$的，其中$f(n, m) = nm$。

正解2·匈牙利暴力版

- 如果你在前面$b_i = 1$的算法中使用了匈牙利算法进行匹配，那么我们考虑如何让他适配没有特殊限制的情况。
- 匈牙利算法的瓶颈在于你不能匹配一个点多次。一个很自然的想法是将每个导师暴力拆成b个点，而显然是不行的……吗？
- Emmmm……其实是行的……
- 建图的复杂度显然是$O(n^3)$，我们考虑跑匹配的时间开销。
- 大家都知道匈牙利一次增广的时间开销为$O(m)$。然而事实上，它的意义是你增广经过的边数。当全局最多只有$O(n)$个节点被匹配，每个点的度数最多为$O(n)$，那么如果你经过超过$O(n^2)$条边，就一定能增广成功。
- 于是增广一次的复杂度就是$O(n^2)$，匹配的复杂度是$O(n^3)$。
- 因此总复杂度是$O(n^4 \log n)$的，和刚才的看上去也没啥不一样……

正解3·Dinic版

- 如果你在前面$b_i = 1$的算法中使用了Dinic算法进行匹配，那么就没有那么多破事了，直接改流量即可AC此题。

正解4·Yazid的理论最优算法

- 第一小问显然不是瓶颈，尝试优化第二小问。
- 同样考虑前面介绍的$C = 1$的更优的算法：对于每位选手i，如果他上升到了第k名，我们只需要关心前$k - 1$名的志愿是否会发生变化即可。
- 由于i要实现梦想，因此他必须被前s_i志愿录取。我们把选手i与这些志愿中包含的导师全部进行连边。
- 接着，我们依次检查第$1, \dots, i - 1$名的志愿是否会发生变化：检查选手k时，只需要连k在第一小问中求出答案志愿的边即可。如果检查到k时增广失败，则表示i不能完成梦想，一旦出现这种情况，则立刻可知i选手第二问的答案即为$i - k$。
- 特别地，如果你使用了匈牙利算法，那么你不需要重新拆点，直接使用第一小问留下的所有虚拟节点即可。（想一想，为什么？）
- 很显然，这个算法的复杂度是$O(f(n, nC)n)$的。

这4个正解我到底应该写哪个

- 事实上，你使用任意一个上面提到的正解都能AC此题。
- Q：既然有更优的做法，为啥不卡掉带log的？
- A：网络流/匹配算法的复杂度本来就是玄学（误），深究理论复杂度意义不大。
- Q：你在网络流算法中只提到了Dinic，请问ISAP呢？
- A：ISAP由于不支持边加边边增广，因此会使理论复杂度全盘爆炸。
- Q：那么ISAP不能通过此题咯？
- A：事实上，常数优秀的ISAP是可以通过此题的。这是因为良心的（恰巧会写ISAP的）命题人写了一个ISAP版本的，并把它放了过去。

省选·雪·与Yazid的祝福

- 今年北京一共下了2场雪。
- 第一场是在Yazid通宵造完这题之后（祭出的三月雪）；
- 第二场是在省选前2日，也就是我们出发前夜（壮行的四月雪）。
- （烘托了悲伤的氛围？）
- 到今天为止，雪停了（你们在的地方雪停了吗？），省选结束了，在座各位的命运也应该尘埃落定了。
- 无论雪下还是停，生活都要继续，无论结果如何，Yazid都祝你们在接下来的OI路或高考路或其他路上走得顺利。
- 无论你接下来将踏上哪条路，Yazid都期待日后能与你再见~

感谢

- 感谢CCF提供这次命题的机会。
- 感谢 
- 感谢不愿意透露姓名的Temporary.D.O.命题人和某Globe姓命题人与我探讨ISAP、Dinic算法的理论复杂度
- 感谢 

友情出镜

FIN