5C – Bursztyny

Autor zadania: Tomasz Idziaszek

Autor omówienia: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Treść

Mamy dany ciąg $n \leq 10^5$ liczb, każda z nich do 10^6. Chcemy znaleźć największe k takie, że da się ten ciąg przedstawić jako sumę ciągów, z których każdy ma 1 na k sąsiadujących pozycjach, a 0 wszędzie indziej.

Rozwiązanie

Ustalmy jakieś k, i zastanówmy się, jak sprawdzić czy dany na wejściu ciąg da się przedstawić jako suma ciągów z k jedynkami.

Rozważmy pierwszą niezerową pozycję a_i w wejściowym ciągu. Jako, że wszystkie poprzednie pozycje są zerami, to żaden ciąg jedynek nie może zaczynać się wcześniej niż i. Wobec tego na pozycji i może zaczynać się dokładnie a_i ciągów jedynek. Możemy więc odjąć a_i od wszystkich liczb od a_i do a_{i+k-1}, i sprawdzać dalej. Jeśli któraś z liczb a_j stanie się w wyniku tego ujemna, odpowiedzią jest `NIE`, jeśli wszystkie stały się zerami, odpowiedzią jest `TAK`, a w pozostałych przypadkach przechodzimy do następnej liczby a_i.

To rozwiązanie wykonuje $O(nk)$ operacji (k operacji odejmowania za każde dodatnie a_i). Przyspieszmy je. Skoro przechodzimy indeksy i w rosnącej kolejności, to zamiast odejmować a_i od wszystkich liczb z przedziału $[i, i+k)$, możemy zliczać, ile łącznie mamy odjąć. Dokładniej, utrzymujemy liczbę x, czyli ile musimy odjąć od każdego dalszego a_j, oraz dla każdego dotychczas nierozpatrzonego indeksu j liczbę r_j, która oznacza, o ile należy zmniejszyć x po rozpatrzeniu indeksu j. Początkowe wartości x oraz wszystkich r_j to zera. Teraz, kiedy rozpatrujemy indeks i, musimy:

- Odjąć x od a_i; jeśli wynik jest ujemny, to odpowiadamy `NIE`.
- Zwiększyć x o nową wartość a_i (co jest równoważne zastąpieniem jej starą wartością a_i; stara wartość a_i oznacza po prostu ile ciągów jedynek przechodzi przez indeks i).
- Zwiększyć r_{i+k-1} o nową wartość a_i (bo ciągi rozpoczęte w indeksie i skończą się po indeksie r_{i+k-1}).
- Zmniejszyć x o r_i.

Wykonujemy dla każdego i stałą liczbę operacji, czyli jesteśmy w stanie sprawdzić pojedynczą wartość k w czasie $O(n)$. To daje nam rozwiązanie całego zadania w $O(n^2)$, przez sprawdzenie wszystkich możliwych wartości k. To niestety wciąż jest zbyt wolne.

Ostatnia optymalizacja, której potrzebujemy, to zauważyć, że jeśli cały ciąg jest sumą ciągów z k jedynek, to suma wszystkich wartości a_i musi być podzielna przez k. Wystarczy zatem sprawdzić wszystkie dzielniki sumy a_i, które są mniejsze lub równe od n, i sprawdzić tylko tych kandydatów na k. Dzielników może być niewiele (poniżej 2000), więc to rozwiązanie będzie już wystarczająco szybkie.