《Everlasting Friends?》命题报告

南京外国语学校 郑煦翔

2025 年 9 月

目录

1 题目简述

给定一棵 n 个点的树 T。记 $T_{\max}$ 为对 T 从小到大加入点构建的重构树，$T_{\min}$ 为 T 从大到小加入点构建的重构树。

具体而言，按某个顺序 ord 构建重构树的流程如下：

1. 维护点集 S，依次遍历每个 $p = ord_i$。

2. 对于所有在原树上与 p 相邻且在 S 中的点 q，将 S 点集的导出子图中 q 所在连通块最晚加入 S 的点在重构树上与 p 连边。

3. 将 p 加入点集 S。

- $tp = 1$ 时，求有多少个 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集满足其在 $T_{\max}$ 与 T 中均为连通块。
- $tp = 2$ 时，求有多少个 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集满足其在 $T_{\max}$ 与 $T_{\min}$ 中均为连通块。

2 数据范围

子任务编号	$n \le$	$tp =$	特殊性质	分值
1	10	1	无	5
2	2000	1	无	15
3	2×10^5	1	树退化为一条链	5
4	2×10^5	1	树退化为菊花图	5
5	2×10^5	1	无	10
6	10	2	无	5
7	100	2	无	10
8	500	2	无	10
9	5000	2	无	10
10	2×10^5	2	树退化为一条链	5
11	2×10^5	2	树退化为菊花图	5
12	2×10^5	2	无	15

对于所有数据：$1 \le n \le 2 \times 10^5$。保证给出的边形成一棵树。

2s，512MB。

3 解题过程

3.1 $tp = 1$

考虑如何计算有多少个子集在 $T_{\max}$ 与 T 上均为连通块。

先考虑选择 n 的情况。不难发现 T 中所有边在 $T_{\max}$ 上均连接一对祖先关系的点，同时每一条 $T_{\max}$ 中的边均被至少一条 T 中的边覆盖，T 中每一条边覆盖的边指的是其两个端点在 $T_{\max}$ 上的路径包含的边。

考虑断掉 $T_{\max}$ 中的一些边使得两边在 T 中连通。不难发现这等价于 $T_{\max}$ 中这条边被恰好一条 T 中的边覆盖。

$O(n)$ 找出这些边，显然只有这些边是可以被断掉的。由于计数时要求包含根，如果一个合法的 $T_{\max}$ 上包含根的连通块分割出了若干个子树，每个子树向上的原树边都一定与这个连通块相连，于是必须切掉所有这些边。这时，如果每个子树断掉的向上的原树边超过一条，由于每个子树内部显然连通，外面一定在原树上不连通。如果只有一个，那么显然只有可能跟 $T_{\max}$ 划分出同样的两部分。因此，问题等价于只允许删一些边，问包含根的不同连通块数量。直接树形 dp 即可。

枚举子集中的最大值 x，这说明选择子集在 $T_{\max}$ 上的根为 x。取出 $T_{\max}$ 的对应子树，对应子树在 T 中也是连通块。

因此，对每个子树跑一遍树形 dp 求和即可。总复杂度 $O(n^2)$。

考虑优化，从下往上加边，不难发现每个 i 总要和其每个子树中的某个点 v 连边。因此，v 向上一直到 i 路径上所有点覆盖次数会 $+1$。也就是说，除了最上面一条边外，其他全部都会变得 > 1。

不难发现均摊总共有 $O(n)$ 条边改变状态，使用并查集找出这些边的改变。使用 ddp 维护即可，总复杂度 $O(n \log^2 n)$。使用全局平衡二叉树可以做到 $O(n \log n)$。

当然，有一种常数更小的 $O(n \log n)$ 实现。注意到“改变”是将所有还可以断开的 v 到 i 路径上除了 i 向下的一条边全部设为不可断开，且由于 $T_{\max}$ 每个点 x 往其每个子树的原树边恰好有一条，一端为 i 的边互不影响。设 v 到 i 路径上倒数第二个点为 u，考虑从 u 的答案中直接扣除所有被设为不可断开的边的影响，设 f_i 为 i 子树的答案，那么 u 的给 i 贡献系数为 f_u 乘上所有被设为不可断开的边 (x, fa_x)，$\frac{f_x-1}{f_x}$ 的乘积。正确性可以感性理解成从上往下将边设为不可断开，而每次对应子树都直接给 f_i 有 f_x 的贡献，设为不可断开后贡献则为 $f_x - 1$，因此贡献为 $\frac{f_x-1}{f_x}$。

对于 $f_x = 0$ 的情况，将每个值表示为 $a \times 0^b$ 维护即可。总复杂度 $O(n(\log n + \log \mathrm{Mod}))$，其中 Mod 为模数。

3.2 $tp = 2$

考虑如何计算有多少个子集在 $T_{\max}$ 与 $T_{\min}$ 上均为连通块。

注意到如果一个子集在 $T_{\max}$ 与 $T_{\min}$ 上均为连通块，那么它在 T 上也是连通块。证明可以考虑两个在 $T_{\min}$ 与 $T_{\max}$ 上连通的点 (x, y) 对应 T 上的路径。归纳可以发现所有路径上的点都必须在选出的连通块中。

枚举最大值 x 与最小值 y，希望类似 $tp = 1$ 解决。然而在枚举之后 x 在 $T_{\max}$ 中的子树或 y 在 $T_{\min}$ 中的子树不一定合法。考虑寻找最大值 x 最小值 y 对应的极大合法连通块。

一种暴力的方法是维护一个点集 S，轮流取出 $T_{\max}$ 与 $T_{\min}$ 中包含 (x, y) 的连通块，迭代即可。该做法可以类似 $tp = 1$ 在 $O(n^3)$ 或 $O(n^2 \log n)$ 的复杂度内解决问题，但是较为难以优化，对正解帮助不大。

另一种办法是先以 x, y 原树对应的链为初始子集 R。每次如果有不在 R 且与 R 原树上相邻的 z 满足 $y \le z \le x$，则 z 一定需要加入极大合法连通块，因为设 z 向 x, y 链方向的父亲为 w，则 z 必然在 $T_{\min}$ 或 $T_{\max}$ 上是 w 的祖先。由于 w 已经选中，则 z 必须选中。而对于与 R 原树上相邻的 $z < y$ 或 $z > x$ 显然不能加入点集。

不难发现按照以上方法加点后得到的连通块是唯一的。因此该极大合法连通块也就是 $\max = x, \min = y$ 唯一可能合法的连通块。暴力判断该连通块的合法性，总复杂度 $O(n^3)$。

考虑枚举 x 后从大往小枚举 y，然后加入所有可能的点，在加入过程中维护其在 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$ 上分别是不是连通块，总复杂度 $O(n^2)$。

考察更多性质，该可能的极大合法连通块包含的点必然是 $T_{\max}$ 上 x 子树与 $T_{\min}$ 上 y 子树点的交，这是因为对于所有不在该连通块中的点 $y \le z \le x$，必然满足 $z \to x$ 上有比 x 更大的或者 $z \to y$ 上有比 y 更小的，因此必然不在某个子树中。而对于所有在该连通块中的点 $y \le z \le x$，必然满足 $z \to x$ 上没有比 x 更大的且 $x \to y$ 上没有比 y 更小的，因此 x, y 在对应子树中一定是 x 的祖先。

问题转化为求所有满足 $T_{\max}$ 上 x 子树包含 y，$T_{\min}$ 上 y 子树包含 x 的二元组 $y \le x$，是否有两子树交集在两树上均为连通块。对于连通块问题，不难想到使用欧拉定理转化，考察点与边对每一组 (x, y) 的贡献。不难发现每一条边和每一个点会给所有 $T_{\max}$ 中 x 是 p 祖先，$T_{\min}$ 中 y 是 q 祖先的 (x, y) 贡献，其中 p, q 为对应点或对应边在两树上的 LCA。由于题目要求在两个子树中均为连通块，因此可以给每个点设 2 的贡献，每条边（$T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 中的边）设 -1 的贡献。此时，所有合法连通块会取到最小值 2 且有且仅有合法连通块可以取到该最小值。

预处理出所有 (p, q)，树剖线段树合并大力维护即可。一个细节是查询的时候需要保证 $T_{\max}$ 上 x 子树包含 y，$T_{\min}$ 上 y 子树包含 x，而选择做线段树合并的那棵树上的限制如果每次直接查询另一棵树到根链的话无法保证。一种方法是通过另外的数据结构手段找出查询链的长度，另一种方法是在做某个点的修改时同时给这个单点一个 -1 的额外修改，最后查一条链上取到 1 的点数。时空复杂度均为 $O(n \log^2 n)$。

考虑优化空间（好像笔者并没有成功卡掉 $O(n \log^2 n)$ 空间，欢迎各位 hack）。考虑同一时刻可以只保留 $O(\log n)$ 棵线段树，因此总空间必然不超过 $O(n \log n)$，节点回收即可。

当然，将树剖线段树改为全局平衡二叉树合并可以直接做到 $O(n \log n)$，需要对全局平衡二叉树的轻子树也带权分治一下使得每个点的儿子数为 $O(1)$，方便合并。

4 命题思路

本题在笔者思考 Kruskal 重构树的性质时偶然枚举出。本题最初只有 $tp = 1$，后来在发现“如果一个子集在 $T_{\max}$ 与 $T_{\min}$ 上均为连通块，那么它在 T 上也是连通块”等性质后试图思考求解 $T_{\min}$ 与 $T_{\max}$ 公共连通块的问题，之后发掘更多性质并得出 $tp = 2$ 问题的做法。

笔者由于部分分设计、本题区分度及 $tp = 1$ 对 $tp = 2$ 有一定联系与提示等原因，最后保留了 $tp = 1$ 作为本题的一个子问题。

由于笔者实力有限，两问可能仍有优化空间，也欢迎吊标/有更加简洁做法的同学与笔者交流更优解法。

5 总结

本题题面简洁，切入点为十分平凡的重构树与连通块。正解考察了选手的推性质能力，融合多种计数、数据结构、图论技巧。整体难度不高，思维与码量较为均衡。部分分设计合理且具有引导性，使得本题具有较好的区分度。

6 参考资料

这是一个原创题。没有参考资料。

7 致谢

感谢集训队叶隽霖，精英集训刘恒卓、戴睿宸同学验题及帮助改进做法。
感谢 IOI 2026 中国国家集训队工作组给予作为非集训队的笔者的投题机会。