《快乐》解题报告

福建师范大学附属中学 林旭恒

1 试题

1.1 问题描述

这是一道提交答案题。

你将被给出若干个序列，每个序列都存在一个确定的规律，你需要找出这个规律并根据规律求出序列的某一项。

共会给出10个输入文件，编号为$0 \sim 9$。每个输入文件都包含5个序列，每个输入文件中的序列规律都有一定相关性并且存在一定难度梯度。

你需要对每个序列求出这个序列指定的某一项，每正确求出一个答案，你将获得2分。答案以标准答案为准，如果你求出的某个询问的答案与标准答案不同，对于这个询问你将获得0分，即使你发现的规律可以使得给出的序列每一项均满足。

1.2 输入格式

编号为i的输入文件名为i.in，每个输入文件中会依次给出5组询问。

每组询问包括两行，第一行三个整数n, p, k。n表示数据会给出序列的第$1 \sim n$项。p表示该序列是否在模某个数的意义下以及具体的模数，若$p = 0$，该序列在整数范围内；否则该序列在模p意义下，所有数字均为$0 \sim p-1$内的整数；保证$p \geq 0$。k表示要求求出该序列的第k项，注意k可以不是正整数，其意义可以根据序列的规律得到。第二行包含n个整数，表示给出的序列。为了便于观察，每组询问结束后会多给出一个空行。

1.3 输出格式

对于编号为i的输入文件，你需要提交一个文件名为i.out的答案文件，如果没有提交，对于这个输入文件你将获得0分。

每个答案文件中需要包含至少五行，其中前五行每行必须恰好包含一个整数，依次表示对应的输入文件中每个询问的答案，如果对于某个询问你无法求出正确答案，建议输出-1。如果你提交的答案没有严格按照这个格式，不保证能返回正确的评测结果。

第五行之后的部分允许选手提交一些额外的信息，可以包括所发现的规律或是自己的感想等，此部分对选手得分没有任何影响。

2 具体分析

2.1 测试点0

本测试点主要考察内容：等差数列、等比数列。

作为第一个测试点，本测试点难度较低，有助于选手更快地上手题目以及更好地理解题意（包括每个测试点内序列规律相关性的具体意义）。

2.1.1 序列0.1

$n = 10, p = 0, k = 20$。

序列：$f(n) = 2(n-1) + 1$。

首项为1，公差为2的等差数列。

非常容易观察出来。

2.1.2 序列0.2

$n = 10, p = 233, k = -2147483658$。

序列：$f(n) = 3(n-1) + 2$。

首项为2，公差为3的等差数列。

与序列0.1基本相同，增加了取模，k为负数直接代入通项公式即可，以及需要注意k的值不在int范围内。

2.1.3 序列0.3

$n = 5, p = 0, k = 13$。

序列：$f(n) = 3 * 13^{n-1}$。

首项为3，公比为13的等比数列。

根据序列的增长速度以及前面等差数列的提示，不难观察出来。

2.1.4 序列0.4

$n = 10, p = 233, k = 23333$。

序列：$f(n) = 71 * 47^{n-1}$。

首项为71，公比为47的等比数列。

由于在模意义下，不容易直观地观察出来，但是根据前面的提示容易猜想是等比数列，用求逆元或暴力枚举的方法不难得到公比，再验证结论即可。

2.1.5 序列0.5

$n = 10, p = 233, k = 10^9$。

序列：$f(n) = 108 * 23^{n-1} + 67$。

首项为108，公比为23的等比数列各项都加上67。

也等同于$f(1) = 108 + 67, f(n) = 23 * f(n-1) - (23-1) * 67$。综合前面的等差数列和等比数列，我们可以猜想这个数列的每一项是前一项乘一个数再加一个数得到，由于p较小，可以暴力枚举验证。

2.2 测试点1

本测试点主要考察内容：幂函数。

本测试点同样难度较低。

2.2.1 序列1.1

$n = 10, p = 0, k = 6666$。

序列：$f(n) = n^2$。

非常容易观察出来，同时对接下来的序列具有一定提示功能。

2.2.2 序列1.2

$n = 10, p = 233, k = 23333$。

序列：$f(n) = n^5$。

模数较小，序列不够直观，但是容易发现$f(1) = 1 = 1^5, f(2) = 32 = 2^5$，不难发现规律。

2.2.3 序列1.3

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 987654321$。

序列：$f(n) = n^2 + (n + 1)^5$。

序列的增长速度大致与n^5相同，同时注意到$f(1) = 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1$，根据每一项与$(n + 1)^5$的差值不难得到通项公式。

2.2.4 序列1.4

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 100$。

序列：$f(n) = n^{-1}$。

数字的规律十分明显，熟悉逆元的选手很容易发现规律，求逆元即可得到答案。

2.2.5 序列1.5

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 100$。

序列：$f(n) = (n + 2)^{-3}$。

根据序列1.4的提示以及数字的规律，容易想到先将序列中的每个数求逆再进行观察，不难发现规律。

2.3 测试点2

本测试点主要考察内容：线性递推。

2.3.1 序列2.1

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 10^9$。

序列：$f(1) = f(2) = 1, f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$。

经典的斐波那契数列，不难观察出来。可以用矩阵快速幂求得答案，由于k不是特别大，也可以用$O(1)$空间，$O(k)$时间的暴力算法求得。

2.3.2 序列2.2

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = -10^9$。

序列：$f(1) = f(2) = 1, f(n) = f(n-1) + f(n-2)$。

与序列2.1相同，唯一的区别是k为负数，根据$f(n-2) = f(n) - f(n-1)$反推回去即可。

2.3.3 序列2.3

$n = 15, p = 10^9 + 7, k = 10^9$。

序列：$f(1) = f(2) = f(3) = 1, f(n) = f(n-1) + f(n-3)$。

斐波那契数列的变种，根据斐波那契数列的提示仔细观察不难发现规律。

2.3.4 序列2.4

$n = 15, p = 10^9 + 7, k = 10^9$。

序列：$f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 3f(n-1) - f(n-2) + 2$。

序列的具体意义见“[FJOI2007]轮状病毒”。

可以通过观察得到规律（较难），也可以由前面序列的提示得到该测试点与线性递推有关，根据递推式列出方程求解即可。

2.3.5 序列2.5

$n = 100, p = 10^9 + 7, k = 10^9$。

序列：$f(n) = 0\ (n < 0), f(0) = 1, f(n) = \sum_{i=1}^{10} i \cdot f(n-i)\ (n > 0)$。

规律不是特别明显，根据前面序列的提示可以猜想是线性递推数列，根据递推式列出方程后用高斯消元法求解即可。

2.4 测试点3

本测试点主要考察内容：阶乘与组合数。

2.4.1 序列3.1

$n = 10, p = 0, k = 15$。

序列：$f(n) = n!$。

比较容易发现规律。主要起提示作用。

2.4.2 序列3.2

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 999997$。

序列：$f(n) = C_{2(n-1)}^{n-1}$。

由序列3.1的提示与数字规律不难猜想该序列与阶乘和组合数有关。通过一些观察和尝试不难发现规律。

2.4.3 序列3.3

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 10^{10}$。

序列：$f(n) = C_{2(n-1)}^{n-1}$。

规律与序列3.2相同。由简单计算可知$f(k)$中含有一个$10^9 + 7$的因子，故答案为0。

2.4.4 序列3.4

$n = 10, p = 10^9 + 7, k = 98765432123456789$。

序列：$f(n) = C_{2(n-1)}^{n-1}$。

规律与前两个序列相同。计算可知$f(k)$中不含$10^9 + 7$的因子，计算$f(k)$时，我们可以忽视$10^9 + 7$的倍数，再考虑模$10^9 + 7$为每种余数的数被乘或除了多少次，不难算出答案。

2.4.5 序列3.5

$n = 25, p = 10^9 + 7, k = 233333$。

序列：$f(n) = C_{3n-2}^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$。

由前面序列的提示及数字规律猜想该序列与组合数有关，对序列的每一项暴力枚举求出C_N^M表示下的N和M后不难观察出规律。

2.5 测试点4

本测试点考察内容：质数

2.5.1 序列4.1

$n = 10, p = 0, k = 100$。

序列：$f(n) = p_n$，其中p_n表示第n小的质数。

容易观察得到规律，用筛法等方法容易求出答案。

2.5.2 序列4.2

$n = 10, p = 0, k = 10^8$。

序列：$f(n) = p_n$。

与序列4.1相同。k比较大，直接筛可能空间不够，可以将值域分成若干段每段分别用筛法找出其中的质数。

2.5.3 序列4.3

$n = 10, p = 998244353, k = 233333$。

序列：$f(n) = p_n^{-2}$。

数字在模意义下且看上去比较杂乱，联系测试点1，可以想到先将每个数求逆，之后就不难发现序列的规律。

2.5.4 序列4.4

$n = 100, p = 0, k = 233333$。

序列：$f(n) = \min\{p_i | \exists p_j, p_i + p_j = 2n + 2\}$，即最小的满足$2n + 2 - p$是质数的质数$p$。

相关：哥德巴赫猜想。

注意到每个数字都是比较小的质数，可以联想到哥德巴赫猜想，由于哥德巴赫猜想的对象是不小于4的偶数，故$f(n)$对应的对象为$2n + 2$。

2.5.5 序列4.5

$n = 100, p = 0, k = 233333$。

序列：$f(n) = n^{-1} \mod p_n$。

根据之前的序列可知该测试点与质数有关，注意到在这个序列中每一项都不超过p_n，可以猜想第n项与模p_n有关，再联系序列4.3，对每一项求逆即可发现规律。

2.6 测试点5

本测试点主要考察内容：质数相关计数

本测试点内序列规律比较不易发现，难度较高。

2.6.1 序列5.1

$n = 30, p = 0, k = 98765432123456789$。

序列：$f(n) = \phi(n)$，即n以内有多少个正整数与n互质。

熟悉ϕ函数的选手不难发现这个序列的规律，暴力对k分解质因数后即可计算出答案。

2.6.2 序列5.2

$n = 100, p = 0, k = 98765432123456789$。

序列：$f(1) = 0, f(n) = f(\phi(n)) + 1\ (n > 1)$，即每次操作用$\phi(n)$替换$n$，至少需要多少次操作才能将$n$变为1。

通过观察可以发现这个序列与ϕ函数具有较强的相关性，根据增长速度可以猜想得到计算公式。

2.6.3 序列5.3

$n = 100, p = 0, k = 10^6$。

序列：$f(n) = \sum_i [p_i \le 10n]$，即$10n$以内的质数个数。

熟悉质数分布的选手可以观察发现这个规律，序列5.1也提供了考虑计数的思路。

2.6.4 序列5.4

$n = 100, p = 0, k = 10^6$。

序列：$f(n) = \sum_{i,j} [p_i + p_j = 2n + 2]$，即$2n + 2$能分解成多少对质数的和。

相关：哥德巴赫猜想。

哥德巴赫猜想在测试点4中也有出现，结合本测试点相关性质，通过观察和猜想可以得到规律。

2.6.5 序列5.5

$n = 10000, p = 10^9 + 7, k = 10^6$。

序列：$f(n) = \sum_{p_i<p}[p_i^{-1} \mod p \le n]$，即$n$以内模$p$意义下的乘法逆元为质数的数的个数。

序列单调不降且增长较慢，结合本测试点相关性质猜想是对$1 \sim n$内满足某种性质的数的计数，考虑将增长的地方提取出来观察。

注意数据中给出了模数$p = 10^9 + 7$，而k只有10^6，如果只是将$f(k)$对p取模显然p没有意义，结合之前数据点的做法，将提取出的数对p求乘法逆元，再结合观察求出的逆元，$f(n)$增长点的分布频率以及本测试点的相关性质，可以猜想与是否是质数有关，即可发现规律。

2.7 测试点6

本测试点主要考察内容：递推关系。

2.7.1 序列6.1

$n = 25, p = 10^9 + 7, k = 10^6$。

序列：$f(1) = f(2) = 1, f(n) = f(n-1) \cdot f(n-2) + 1$。

通过观察不难发现每一项与前两项的乘积有关。

2.7.2 序列6.2

$n = 25, p = 10^9 + 7, k = 10^6$。

序列：$f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = n(f(n-1) + f(n-2))$。

通过观察可以发现$f(n)$是n的倍数且与前两项的和有关。

2.7.3 序列6.3

$n = 25, p = 10^9 + 7, k = 10^6$。

序列：$f(n)=\frac{n}{f(n-1)}$。

观察得出序列的每一项可以表示为分数的形式，转化为分数后再观察，不难发现规律。

2.7.4 序列6.4

$n=100,p=0,k=10^6$。

序列：$f(n)=(f(n-1)^2+1) \mod n$。

观察发现$f(n)$不会超过n并且序列中反复出现了形如$1,2,5,26$的连续若干项，不难发现规律。

2.7.5 序列6.5

$n=1000,p=0,k=10^6$。

序列：$f(n)=1\ (n\le 3), f(n)=n-f(f(n-1))\ (n>3)$。

根据前几个序列可以发现本测试点与非线性递推关系有关，如果能联想到复合函数形式的递推式，有机会发现这个序列的规律。

另外，如果本序列为$f(1)=1,f(n)=n-f(f(n-1))\ (n>1)$，这个序列等价于$f(n)=\left\lfloor\frac{\sqrt{5}-1}{2}(n+1)\right\rfloor$，为了避免这种情况，特别对这个序列进行了微调。

2.8 测试点7

本测试点主要考察内容：位运算。

2.8.1 序列7.1

$n=30,p=0,k=2020202$。

序列：$f(0)=0,f(n)=f(n-1)\ xor\ n$，其中$xor$表示按位异或。

直接观察序列可以得到更直观的规律：$f(n)=1\ (n \mod 4=1), f(n)=n+1\ (n \mod 4=2), f(n)=0\ (n \mod 4=3), f(n)=n\ (n \mod 4=0)$。

2.8.2 序列7.2

$n=2000,p=0,k=2333333$。

序列：$f(n) = n \ and \ \sum_{i=0}^{\infty} 4^i$，其中$and$表示按位与，即$n$只保留2的偶数次幂的二进制位后的结果。

观察发现$f(n)$存在比较特殊的周期性质，不难发现这个规律。

2.8.3 序列7.3

$n = 2000, p = 0, k = 1049599$。

序列：$f(n) = n \ or \ (n+1)$，其中or表示按位或，等同于$f(n) = n + lowbit(n+1)$，其中$lowbit(n)$表示n的最低的为1的二进制位。

可以发现$f(n)$与n比较接近，观察$f(n) - n$，不难发现这个规律。

2.8.4 序列7.4

$n = 2000, p = 0, k = 2333333$。

序列：$f(n) = n \ xor \ 2n$。

可以发现$f(n)$与$3n$比较接近，观察$3n - f(n)$，联系前几个序列可以发现该测试点与位运算有关，转化为二进制后观察可以发现规律。

2.8.5 序列7.5

$n = 2000, p = 2^{32}, k = 23333$。

序列：$f(1) = 1, p1(x) = x \ xor \ (x << 13), p2(x) = x \ xor \ (x >> 17), p3(x) = x \ xor \ (x << 5), f(n) = p3(p2(p1(f(n-1))))$，其中<<为左移，>>为右移。

$p = 2^{32}$提示数字类型为unsigned int，并且序列中需要考虑二进制下的后32位。虽然递推式较为复杂，但由于$f(1) = 1$，通过前几项可以观察出一定的性质。可以猜想每一项是由前一项通过一些位运算（主要是异或）得到的，可以根据前一项二进制下每一位对后一项二进制下每一位的影响列出异或方程组解得递推式。

另外，这个递推式作为随机数生成器在“[WC2017]挑战”中出现过。

2.9 测试点8

本测试点主要考察内容：无理数取整。

2.9.1 序列8.1

$n = 100, p = 0, k = 2333333$。

序列：$f(n) = \lfloor 2\pi n \rfloor$，即半径为$n$的圆的周长向下取整。

根据序列的增长速度以及出现的314等数字，不难发现这个序列的规律。

2.9.2 序列8.2

$n = 20, p = 0, k = 30$。

序列：$f(n) = \lfloor e^n \rfloor$，其中$e$为自然对数的底数。

序列以指数函数的速度增长，根据相邻项的比不难发现规律。

2.9.3 序列8.3

$n = 100, p = 0, k = 2333333$。

序列：$f(n) = \left\lfloor \pi n^2 \right\rfloor$，即半径为$n$的圆的面积向下取整。

根据序列的增长速度以及出现的31415等数字，不难发现这个序列的规律。

2.9.4 序列8.4

$n = 30, p = 0, k = 23333$。

序列：$f(n) = \left\lfloor \frac{4}{3}\pi n^3 \right\rfloor$，即半径为$n$的球的体积向下取整。

根据序列的增长速度以及之前序列的提示，可以发现规律。

2.9.5 序列8.5

$n = 30, p = 0, k = 2333$。

序列：$f(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\pi^2 n^4 \right\rfloor$，即半径为$n$的四维球体的体积向下取整。

根据序列的增长速度以及之前序列的提示，可以发现规律。

2.10 测试点9

本测试点主要考察内容：幂和与多项式。

2.10.1 序列9.1

$n = 10, p = 998244353, k = 23333$。

序列：$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^i$。

通过一些观察与尝试，可以发现规律。

2.10.2 序列9.2

$n = 10, p = 500, k = 233$。

序列：$f(n) = n^3 + n^2 + n + 1$。

通过一些观察与尝试，可以发现规律。

2.10.3 序列9.3

$n = 20, p = 0, k = 233$。

序列：$f(n) = 2n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 3n^2 + n + 3$。

根据前面的序列，可以猜想该测试点与多项式有关，可以通过手算或是插值公式验证并求出答案。

2.10.4 序列9.4

$n = 1000, p = 10^9 + 7, k = 2333333$。

序列：$f(n)$为一个233次的多项式，表达式略。

根据前面的序列，可以猜想该序列为一个多项式，通过插值公式可以验证并求出答案。

2.10.5 序列9.5

$n = 1000, p = 998244353, k = 2333333$。

序列：$f(n) = 23333 + \sum_{i=1}^{n} i^{-1}$。

观察前两项，可以发现$f(1) = 23333 + 1, f(2) = 23333 + 1 + \frac{1}{2}$，再通过一些猜想和尝试即可发现规律。

3 总结

本题以一种特殊的形式考察了选手根据具体数值发现规律与性质的能力，同时考察了选手多方面的数学知识。

另外，在选手对一些问题没有具体思路时，可以通过暴力算法求得答案再观察是否有规律和性质，希望本题能起到一定的启发与训练效果。