

time map

简要题意

给定一棵维护按位与的广义线段树，有如下操作：某个节点代表的区间的数与 x 进行按位与、按位或、按位异或并更新整棵线段树；询问从一个节点开始，按照某种规则往下走并输出经过的节点和。

数据范围： $n \leq 10^6, q \leq 10^5, a_i \in [0, 10^9]$ ，时间限制为2s，空间限制512MB

子任务 1

该子任务中 $n, q \leq 10^3$ ，暴力维护即可。复杂度为 $O(nq)$

子任务 2

该子任务中只有询问操作。可以使用 dp 得出从每个节点开始往下走的答案。复杂度为 $O(n)$

子任务 3

该子任务中只有按位与、按位或修改和询问。

从这里开始，我们需要对题目具体性质进行分析。

考虑如何回答询问。可以观察到，由于该线段树维护的是按位与，那么假设从一个点出发的路径上的数为 $a_1, a_2 \dots a_n$ ，一定有 $a_i \& a_{i+1} = a_{i+1} (i < n)$ 。即这个路径一定能被划分成小于等于 $\lfloor \log 10^9 \rfloor$ 段，每段的数相同。现在问题转化为如何找到这些段之间的分界点。

姑且称题中的广义线段树为 J 。

我们考虑对 J 树链剖分。现在可以只考虑如何在一条重链上找这些分界点。因为重链转换最多只会增加 $O(\log n)$ 次切换。我们维护一棵线段树，线段树的每个点存它的**轻儿子**在 J 上的值，特别的，每条重链的末尾存它本身的值。这样每个点在 J 的值相当于一重链上的后缀and和。我们再用线段树二分就可以找到分界点。

然后对于修改，假设现在在修改节点 A ，那么它影响到的就是 A 在 J 上的子树以及祖先。

我们发现，对于子树，可以直接在dfs序上进行区间按位与和区间按位或。这可以通过维护一些标记实现。然后由于我们每个点维护的是**轻儿子**，所以暴力对 $O(\log n)$ 个轻儿子单点修改即可。

时间复杂度 $O(n + q_a \log^2 n + q_b \log n (\log 10^9 + \log n))$ ，其中 q_a 是修改次数， q_b 是询问次数

子任务 4

该子任务多了异或操作。

这时你会发现，对于一个节点 A 进行异或操作，并不等同于对于子树的节点进行异或操作。我们必须对该广义线段树进行进一步分析。

考虑每一位。一个 J 上的节点，把它的区间and和区间or记做一个pair: (and, or)，那么一定只会3种情况： $(0,0), (0,1), (1,1)$ 。在线段树上，我们可以考虑维护这些pair的存在性，即对于每一位记3个数表示该区间是否有 $(0,0), (0,1), (1,1)$ 的点。那么修改操作可以表示为这些数之间的转化。查询也可以用这3种情况的存在性进行查询。

压位实现这些操作即可。

时间复杂度同子任务3。

总结

本题对基本数据结构——线段树进行了拓展，考察了选手对线段树的理解，同时也考察了选手们的代码能力。出题人相信，这道美妙的题目，对你的能力进行了全方面的考察，让你能够认识到自己的不足，一定能给予正在准备北大集训的你，一个有力的援助。