

lg

- 这里提供一个 $O(m \log n + m \log^2 m)$ 左右的做法。
- 考虑底下那个lcm是咋来的。我们分开考虑每个质因子的贡献。我们对于每个质数 p ，枚举 p 的次数 $q \geq 1$ ，我们计算每个lcm是 p^q 倍数的序列的gcd之和，然后计算 p 的这个值次方乘入答案即可。注意我们这里算的是指数，所以要模 $mod-1$ 计算。
- 现在我们的任务是对于 p, q ，计算每个lcm是 p^q 倍数的序列的gcd之和。容斥一下，我们就只需要计算所有序列的gcd之和-没有任何数是 p^q 倍数的序列的gcd之和。

lg

- 考虑如何计算所有序列的gcd之和。我们有 $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ ，所以我们可以枚举一个数 u ，计算gcd是它倍数的序列个数，乘上 $\varphi(u)$ 相加即可。
- 接下来考虑如何计算没有任何数是 p^q 倍数的序列的gcd之和。为了简化计算，我们枚举gcd里有几个 p 。假设gcd里恰好有 p^a ($a < q$)，相当于要计算gcd不是 p 的倍数，没有任何数是 $p^{(q-a)}$ 的倍数的序列的gcd之和 $\times p^a$ ，这里上界要除以 p^a 。
- 接下来就简单了，我们枚举gcd是 u 的倍数，首先 u 不能是 p 的倍数，然后我们要计算每个数是 u 的倍数且不是 $p^{(q-a)}$ 倍数的序列个数，减去每个数是 up 的倍数且不是 $p^{(q-a)}$ 倍数的序列个数。

lg

- 我们枚举gcd是u的倍数，首先u不能是p的倍数，然后我们要计算每个数是u的倍数且不是 $p^{(q-a)}$ 倍数的序列个数，减去每个数是up的倍数且不是 $p^{(q-a)}$ 倍数的序列个数。
- 写出式子： $\sum_{u=1}^{m/p^a} [p \nmid u] \left(\left(\frac{m}{up^a} - \frac{m}{up^q} \right)^n - \left(\frac{m}{up^{a+1}} - \frac{m}{up^q} \right)^n \right)$ （中间四个都是整除，懒得打了），接下来我们来优化计算这个的复杂度。
- $p \nmid u$ 很容易处理，我们只需要计算去掉这个限制的式子，每次用的时候计算 $p|u$ 的部分减去即可。

lg

- $\sum_{u=1}^{m/p^a} \left(\left(\frac{m}{up^a} - \frac{m}{up^q} \right)^n - \left(\frac{m}{up^{a+1}} - \frac{m}{up^q} \right)^n \right)$
- 减号两边是相似的两部分，我们分开计算。 $\sum_{u=1}^{m/p^a} \left(\frac{m}{up^a} - \frac{m}{up^q} \right)^n$ 。
- 容易注意到，这个式子只和 $\left\lfloor \frac{m}{p^a} \right\rfloor$ 和 $\left\lfloor \frac{m}{p^q} \right\rfloor$ 有关，并且 $a \leq q$ ，所以状态数实际上不多。我们可以先对于每个 $\left\lfloor \frac{m}{p^a} \right\rfloor$ 计算 $\sum_{u=1}^{m/p^a} \left(\frac{m}{up^a} \right)^n$ ，再对于每个 $\left(\left\lfloor \frac{m}{p^a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{p^q} \right\rfloor \right)$ 计算 $\sum_{u=1}^{m/p^q} \left(\left(\frac{m}{up^a} - \frac{m}{up^q} \right)^n - \left(\frac{m}{up^a} \right)^n \right)$ 。

lg

- 一开始预处理 $[1, m]$ 的 n 次幂, 这一部分复杂度不超过 $\sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^{m/a} m/ab = O(m \log^2 m)$ 。实现时直接记忆化即可。前一部分复杂度可以分析出是 $O(m \log(m) \log \log(m))$ 。
- 这题应该也有更简单的做法。