SWERC 2025 / H. Hyper Smawk Bros

题目大意

给定 n,m，有 n 个石子，双方轮流操作，每个人可以选择一个 $1\sim m$ 的数 x，不能等于上一个人选择的 x（第一次操作无限制），并取走 x 个石子，若不足 x 个取走全部。取走最后一个石子的人胜，问谁有必胜策略。

数据范围：数据组数 $T\le 10^6$，$1\le n\le 10^6$，$2\le m\le 10^6$。

当 m 为偶数时，先手必胜等价于 $n\not\equiv 0 \pmod{m+1}$。因为此时总是可以变成 $m+1$ 的倍数，而 $m+1$ 是奇数，不可能拆成两个奇偶性相同的数，所以总是可以这么操作。

下面考虑 m 为奇数的情况。对于每个 n，都只有下面三种可能的情形：

- 无论如何都必败；
- 无论如何都必胜，即至少存在两个 x 可以转移到必败状态，使得无论限制的是哪个数都必胜；
- 只存在一个 x 可以转移到必败状态，此时必胜当且仅当限制的数不是 x。

题目所给的查询，都相当于查询一个 n 是否是必败。考虑所有必败的位置的性质。

设 p 是必败点，则对于 $1\le i\le n$ 的 $p+i$，要么是必胜点，要么只有 i 才能转移到必败点。这些 $p+i$ 都不是必败点。

接下来考虑 $p+n+1$，它可以转移到 $(p+i,n+1-i)$（其中 $1\le i\le n$），这个点是必败点的一个必要条件是 $n+1-i=i$，所以 i 是唯一的。于是，$p+n+1$ 要么是下一个必败点，要么只有 $\frac{1}{2}(n+1)$ 可以转移到必败状态。对于第二种情况继续考虑 $p+n+2$，由于 $\frac{1}{2}(n+1)\ne 1$ 所以无法通过转移到 $p+n+1$ 来取胜，由于 $n+2$ 是奇数所以也无法通过转移到 $p+2\sim p+n$ 中的位置取胜，所以此时 $p+n+2$ 是必败点。

根据上面的推理可知，相邻两个必败点的距离要么是 $n+1$ 要么是 $n+2$。所以 $\le N$ 的必败点总数的量级是 $\mathcal{O}(\frac{N}{m})$ 的，而对于所有 $m\le M$ 的必败点两级就是 $\mathcal{O}(M\log M)$ 的。

问题转化为如何快速求出下一个必败点，只需要快速判断 $p+n+1$ 是否必败即可。考虑递归处理这个问题，每一层递归设当前位置为 x，上一个必败点为 p_i，则可以转移到 $\frac{1}{2}(x+p_i)$ 或者 $\frac{1}{2}(x+p_{i-1})$ 或者 p_i-1。对于前两种情况递归处理，第三种情况仅限于 $p_i-p_{i-1}=m+2$ 的情形，此时唯一可以转移到必败状态选择的数是 $\frac{1}{2}(n+1)$，直接判断是否是这个数即可。每一层递归的平均次数都比较少（因为奇偶性限制以及不能被之前的情况排除），期望时间复杂度是 $\mathcal{O}(1)$ 的。

离线处理所有询问即可，总时间复杂度为 $\mathcal{O}(M\log M+T)$。