UOJ NOI Round 9 Day 1 / C. 滑冰

题目大意

给定一个 $n \times m$ 的方格表，有一些位置有障碍，其它位置是空的（保证存在一个位置是空的）。对于每一个空的位置，你需要判断是否以此方格为起点，能否通过若干次滑行操作经过所有空的位置。一次滑行操作为，选择上下左右四个方向之一，不断朝着这个方向走直到要碰到障碍或者方格表边界为止。

数据范围：数据组数 $T \le 10^5$，$n \times m \le 2 \times 10^6$，$\sum n \times m \le 4 \times 10^6$。

注意到一次滑行之后，可以在这次操作的行或列连续空位置段两个端点之间自由滑行。于是可以对每一行或每一列每个空位置的连续段建立一个结点，每个连续段的端点可以滑行到达另一个结点，按照这个规则建出有向图，在缩点后的图上讨论原问题。

对于某个结点作为起点时，需要找一个以该结点为开头的路径，使得对于任意空的格子所在行列连续段对应的两个结点所在的 SCC 中，都至少有一个在路径上。

考虑图中有边相连的两个 SCC，一定存在一个点使得所在行列连续段分别是这两个 SCC，所以任意两个相邻的 SCC 必须至少选择一个。

路径的终点一定是一个出度为 0 的 SCC。出度为 0 的 SCC 有性质：其中所有点能到达的点都在 SCC 中，取任意一个结点对应连续段的端点，它所在行列连续段都属于这个 SCC，所以这个 SCC 必须在路径上。由此可见，若缩点后图中存在多个出度为 0 的 SCC，那么无解。

对于出度为 1 的 SCC u，设出边连接 SCC v，若 u 在路径上则接下来必定经过 v，若 u 不在路径上，那么根据相邻点必须至少选一个的限制，v 仍然在路径上，所以 v 必定在路径上。而对于出度至少为 2 的 SCC，因为出边相连的点显然不能同时经过，所以这个 SCC 是必选的。

根据上述结论，可以得出一些必选的 SCC。考虑按照到唯一的出度为 0 的 SCC 的最长路径中的边数给所有 SCC 分层，称最长路径边数为深度。显然同一层至多选一个结点，可以先把同一层得出多个必选结点的情况特判。

而根据上面的结论，相邻两层必定有至少一个结点是必选的。设最大深度为 D，那么起点的深度必须为 D 或者 $D-1$。首先考虑暴力地枚举起点，如何判定是否可行。使用 2-SAT 解决：

- 结点必选限制可以直接连边解决；
- 没有必选结点的层（设深度为 d），需要约束 $d+1$ 深度必选点的出点必须选至多一个，可以使用前后缀优化建图解决；
- 对于方格表的每个空格子，所在行列连续段至少选一个的限制，也可以直接连边解决。

于是就得到了一个 $\mathcal{O}((nm)^2)$ 的算法。需要优化最后判定起点是否可行的过程。

首先考虑深度为 $D-1$ 的结点作为起点的情况。此时深度为 D 的结点没有必选点，那么 $D-1$ 中就有必选点，所以起点是唯一的，直接处理即可。

接下来考虑深度为 D 的结点作为起点的情况。若深度为 $D-1$ 的结点作为起点可行，那么深度为 D 的所有能到这个深度为 $D-1$ 的起点结点作为起点也都可行。下面考虑其余情

况。

先建出只约束深度为 D 的结点只能选一个的 2-SAT 图。若这个图已经无解，那么无解。否则对于每个深度为 D 的结点 u，设 2-SAT 图中选 u 和不选 u 对应的结点分别为 u 和 u'，那么只需要判定在原图额外加一条 $u' \to u$ 的边，再判定是否可行。这等价于判定 u 是否可达 u'。注意到 u 能到达所有深度为 D 的候选点 v 对应的 v'，所以可以转化为判定是否存在一个 v' 能到达 u'。在 2-SAT 图缩点后的图上按照拓扑序遍历一遍即可求解此问题。

总时间复杂度为 $\mathcal{O}(nm)$。