JOIST 2024 Day 2 / A. Board Game

题目大意

给定一张 N 个点 M 条边的无向连通图，每一个点有一个值为 0 或 1 的属性 S_i。有 K 个人初始分别在结点 $X_1, X_2, \cdots, X_K$ 处，K 个人依次执行操作，每次操作可以不断走到当前结点相邻的结点，直到走到某个 $S_i = 1$ 的结点立刻停止。问 1 号人走到 $T = 1, 2, \cdots, N$ 号结点时，所有人移动的次数的总和最小值分别是多少。

数据范围：$2 \le N, K \le 5 \times 10^4$，$1 \le M \le 5 \times 10^4$。

对于编号为 $2 \sim K$ 的人，由于没有目标结点限制，所以可以分别单独考虑最小移动次数。第一次操作后每个人都将位于一个 $S_i = 1$ 的结点，那么接下来每次操作走过的边数都不超过 2，这是因为可以走到相邻结点再走回来。唯一一种可能的更优策略是，通过若干次移动走到两个相邻的 $S_i = 1$ 的结点，接下来每次操作走过的边数都为 1。

考虑分别求出两种策略对答案的贡献。对于第一种策略，只需要通过 BFS 计算每个点到最近的 $S_i = 1$ 的结点的距离即可，贡献是一个斜率为 2 的一次函数。对于第二种策略，设 x 次操作总距离为 y 时到达了两个相邻的 $S_i = 1$ 的点，那么 $i \ge x$ 时 $f(i) = y + (i - x)$，于是只需要求 $y - x$ 的最小值，这个最小值可以通过 01 BFS 快速计算。我们无需关心 $< x$ 的情况，因为这样算出的贡献肯定不优秀。

所以每一个人对于答案的贡献关于操作次数的函数分为至多两段一次函数，容易线性计算出总和函数。接下来考虑对于第一个人进行 BFS，状态分为三维：当前所在结点、操作次数、总距离。BFS 过程中不断更新答案数组，如果无法更新就剪枝。

对于每一个结点 u，会被保留的状态对于操作次数、总距离一定形成一个凸壳，而这两维大小均不超过 $\mathcal{O}(N)$，所以保留点数不超过 $\mathcal{O}(N^{\frac{2}{3}})$，于是总复杂度为 $\mathcal{O}(M \cdot N^{\frac{2}{3}} + K)$。