#1355 Rhythm Game

题目大意

你正在弹奏一首歌曲，它由 N 个音符组成，对于每个音符，你可以“击中”或“错过”，但整首歌最多只能击中 K 个音符。你希望得分最大，得分规则如下：

- 当你击中一个音符时会使你的连击次数 $+1$，没有击中则清空连击次数，初始连击次数为 0。
- 每个音符有一个价值 A_i，还有一个连击加成数组 C_j。如果在击中第 i 个音符后，连击次数为 j，那么可以获得 $A_i \times C_j$ 分。
- 当连击结束或击中最后一个音符后，可以额外获得 P 分。

数据范围

$1 \le N, K \le 2000$

$-10^9 \le P \le 10^9$

$0 \le A_i \le 10^5$

$-10^5 \le C_j \le 10^5$，并且 $\forall 1 \le j \le N-1$，保证 $C_j \ge C_{j+1}$

解题思路

容易想到 $O(N^3)$ 的动态规划做法，设 $f_{i,j}$ 表示前 i 个音符，错过了 j 个，且最后一个音符没有被击中的情况下的最大得分。记 $w_{l,r}$ 为恰好从 l 开始连击到 r 结束的得分，特别的，当 $l > r$ 时，我们钦定 $w_{l,r} = 0$。那么转移枚举后面一段极长的连击段即可，具体转移式为：

$$f_{i,j} = max_{k<i}\{f_{k,j-1} + w_{k+1,i-1}\}$$

直接计算复杂度 $O(n^3)$，考虑优化。

考虑 $w_{l,r}, w_{l-1,r}, w_{l,r+1}, w_{l-1,r+1}$ 之间的关系：

$$\begin{aligned}(w_{l-1,r} + w_{l,r+1}) - (w_{l-1,r+1} + w_{l,r}) &= (w_{l-1,r} - w_{l-1,r+1}) + (w_{l,r+1} - w_{l,r}) \\ &= -(C_{r-l+3} \cdot A_{r+1}) + (C_{r-l+2} \cdot A_{r+1}) \\ &= A_{r+1} \times (C_{r-l+2} - C_{r-l+3})\end{aligned}$$

题目保证了 $C_j \ge C_{j+1}, A_i \ge 0$，因此 $A_{r+1} \times (C_{r-l+2} - C_{r-l+3}) \ge 0$，所以有：

$$w_{l-1,r} + w_{l,r+1} \ge w_{l-1,r+1} + w_{l,r}$$

进一步可以推导出，对于任意满足 $1 \le a < b < c < d \le N$ 的四元组 (a,b,c,d)，都有：

$$w_{a,c} + w_{b,d} \ge w_{a,d} + w_{b,c}$$

考虑利用上述性质优化动态规划。枚举 j，将转移拆解成 $f_{i,j} = max\{f_{i-1,j-1}, max_{k<i-1}(f_{k,j-1} + w_{k+1,i-1})\}$，前一部分的贡献是容易计算的，考虑后一部分的转移。

记 $g_i = f_{i,j-1}, h_i = f_{i,j}$，那么转移即为 $h_i = max_{k<i-1}(g_k + w_{k+1,i-1})$。根据前面的分析，$w_{l,r}$ 满足平行四边形不等式，根据决策单调性的经典结论，可知 h_i 的转移点单调不降，可以使用决策单调性的相关算法优化转移，单次复杂度 $O(n \log n)$，$w_{l,r}$ 可以在 $O(n^2)$ 的时间内预处理得到。

总时间复杂度 $O(n^2 \log n)$，空间复杂度 $O(n^2)$。

参考资料

郭羽冲，浅谈函数的凸性在 OI 中的应用，集训队论文2023