#1357 Stone Catch Game

题目大意

Yuto和Platina在一个无限大的二维坐标平面上博弈，他们规定 x, y 坐标都在 $[0, 10^9]$ 范围内的点是棋盘内的点，其余点是棋盘外的点。初始棋盘内有一颗白棋和 n 颗黑棋，它们的初始坐标是给定的。当Yuto操作时，如果白棋在 (x, y)，他可以将其移动到 $(x+1, y)$ 或 $(x, y+1)$。当Platina操作时，他可以任选一颗黑棋，如果这颗黑棋在 (x, y)，他可以将其移动到 $(x-1, y)$ 或 $(x, y-1)$。玩家轮流行动，Yuto先手。如果白棋逃出棋盘，则Yuto获胜；如果在那之前的任意时刻白棋和某个黑棋处于同一位置，则Platina获胜。

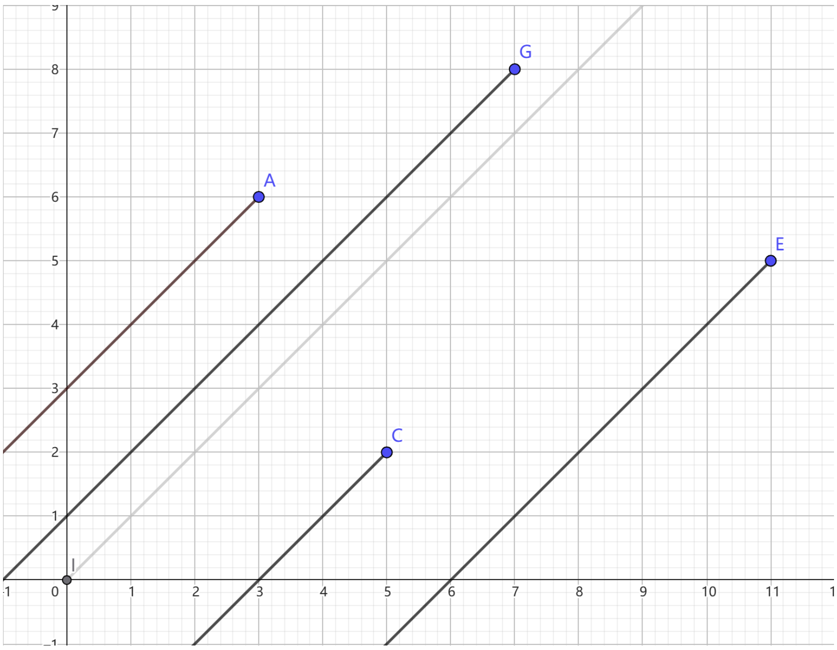
数据范围

$1 \le N \le 3 \cdot 10^5$

保证所有棋子初始在棋盘内。

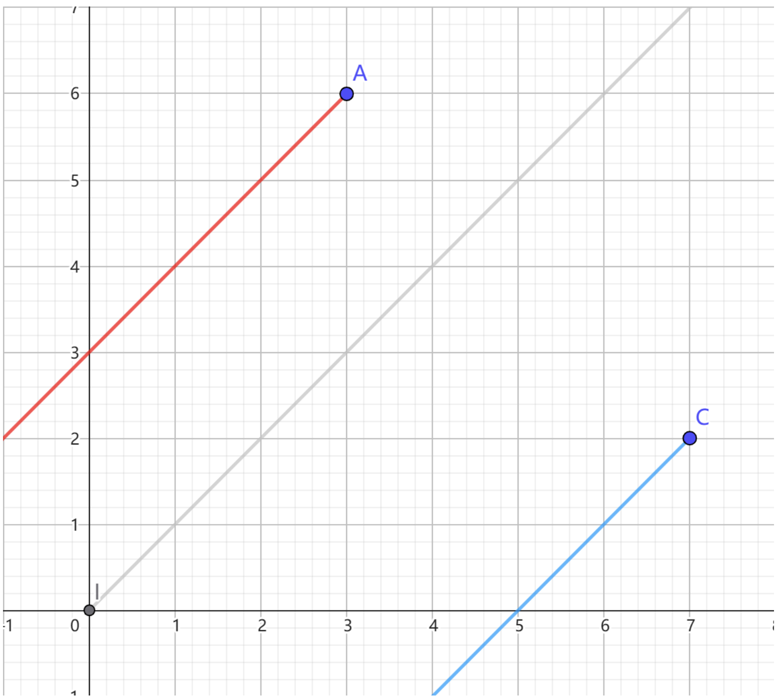
解题思路

如果棋盘上只有一颗黑棋，那么Platina获胜当且仅当黑棋的坐标 (x, y) 满足 $x = y$，也就是说当白棋在黑棋左下方 45° 斜线上时，这颗黑棋一定可以抓住白棋，我们称这条斜线为这颗黑棋的直接控制线（如图所示，以白棋为坐标原点建立坐标系，ACGE为四颗黑棋，斜线为其对应直接控制线）。显然任意时刻白棋不能处于任意一颗黑棋的直接控制线上。



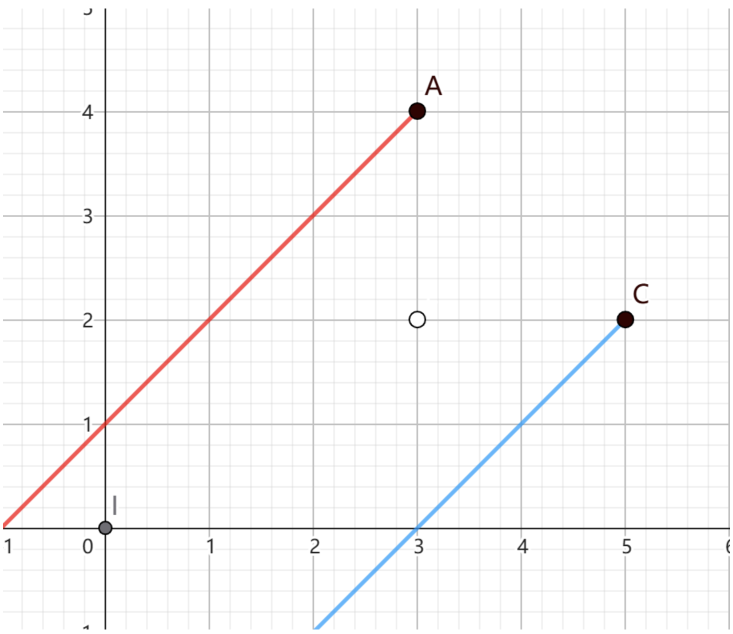
考虑多颗黑棋的情况，我们声称，如果黑棋胜，那么黑方全程至多只会移动两颗不同的黑棋。因为黑棋最终一定是通过在两个方向上对白棋产生限制，使白棋无法移动而获得胜利，移动更多的棋子只会浪费移动次数，是不优的。按照 $x < y$ 和 $x > y$ 把黑棋分成两个集合，容易想到最终会移动的两个黑棋一定是在两个集合中各选一个。

考虑怎么样的两个黑棋可以使得白棋最终无法移动。设两个黑棋分别在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，不妨设 $x_1 < y_1, x_2 > y_2$。先考虑满足 $x_1 \le x_2, y_1 \ge y_2$ 的情况（如图所示）。



贪心的，(x_1, y_1) 只会往下移动，(x_2, y_2) 只会往左移动。观察到当两个黑棋的横纵坐标差都不大于 2 时能完全限制 (x_1, y_2) 左下方的区域，如果此时白棋仍在被限制区域内，那么黑方就获胜了（如图所示）。由于白棋不能跨越黑棋的直接控制线，所以如果黑方胜利，这样的情况是一定会出现的，并且可以直接用距离来描述白棋是否被限制。即黑棋获胜的条件为

$$x_1 + y_2 \geq max(x_2 - x_1 - 2, 0) + max(y_1 - y_2 - 2, 0)$$



考虑 $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ 的情况（如图所示）。注意到 (x_1, y_1) 这颗黑棋不会往左移动，只会向下移动，并且控制线的上半部分是无效的，并不会使用这一段控制线去限制白棋，因此这颗黑棋可以延其控制线平移到 $(x_1 - (x_1 - x_2), y_1 - (x_1 - x_2))$ ，即其等效于一颗位于 $(x_2, y_1 - (x_1 - x_2))$ 的黑棋。那么就转化成了和上面相同的情况了，记 $x_1 - x_2 = d$ 则判定条件为

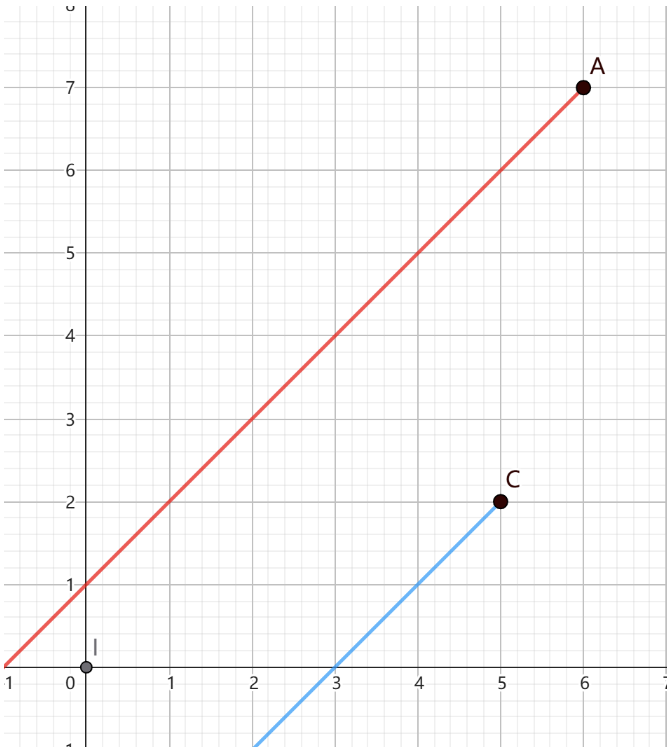
$$x_1 - d + y_2 \geq max(y_1 - d - y_2 - 2, 0)$$

移项，即为

$$x_1 + y_2 \geq max(y_1 - y_2 - 2, d)$$

考虑到 $x_1 + y_2 \geq d, x_2 - x_1 \leq 0$，因此可以把式子统一成和上面相同的

$$x_1 + y_2 \geq max(x_2 - x_1 - 2, 0) + max(y_1 - y_2 - 2, 0)$$



对于 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 的情况，可以类似的分析得到和上一种相同的结果，$x_1 > x_2, y_1 < y_2$ 的情况不可能出现。整理 4 种情况，可得统一的判定条件：

$$x_1 + y_2 \geq max(x_2 - x_1 - 2, 0) + max(y_1 - y_2 - 2, 0)$$

直接枚举两个黑棋，使用上式判定，复杂度 $O(n^2)$。可以讨论 $x_1, x_2 - 2$ 和 $y_1 - 2, y_2$ 的大小关系，容易使用单调栈和线段树维护，时间复杂度 $O(n \log n)$。

参考资料

贾志豪，组合游戏略述——浅谈 SG 游戏的若干拓展及变形，集训队论文2009