#6284 Routes

题目大意

有 n 个城市，有 m 条铁路经过这些城市，每个城市恰好位于一条铁路上。城市被划分成了 k 个区域，每个城市属于一个区域，同一区域内的任意两城市可直飞。铁路相邻城市间通行以及两城市间直飞均恰好需要 1 单位时间。求城市两两之间相互到达所需要的最短时间之和。有 T 组测试数据。

数据范围

$T \le 1000$

$1 \le m \le n \le 10^6$

$1 \le k \le 16$

保证一条铁路至少经过一个城市。

保证所有测试数据的 n 之和不超过 $5 \cdot 10^6$，且 $k > 8$ 的测试数据不超过 5 组。

解题思路

容易发现，任意两个城市间的最短路径，不会包含多于 2 个相同区域的城市，否则直接从第一个该区域的城市直飞最后一个该区域的城市即可。由此还可知任意两城市的最短距离 $\le 2k-1$。

设 $f_{x,c}$ 表示城市 x 到达 c 区域任意城市的最短距离。如果从城市 x 到城市 y 的最短路至少使用了一次直飞，那么 x, y 的距离就是 $\min_{c=1}^{k}(f_{x,c}+f_{y,c}+1)$，记该值为 $dist'(x,y)$。否则距离就是 x, y 在铁路上的距离（如果它们在同一条铁路上）。由于距离一定不超过 $2k-1$，因此最短距离取后者的点对数量不多于 $2nk$ 对，可以暴力修正，因此先用前者描述所有点对间的距离，也就是计算

$$\sum_{x<y}\{min_{c=1}^{k}(f_{x,c}+f_{y,c}+1)\}$$

设 d_x 表示城市 x 所属的区域，$g_{i,j}$ 表示从第 i 个区域中的任意城市到第 j 个区域中的任意城市的最短距离。可知有 $g_{d_x,c} \le f_{x,c} \le g_{d_x,c}+1$，这说明同一区域中的点到其他点的距离非常接近，而区域数 k 非常少，考虑对所有区域对 (a,b)，统计这两个区域间所有点对的距离。

具体的，令 $v=\min_{c=1}^{k}(g_{a,c}+g_{b,c}+1)$，那么对于任意满足 $d_x=a, d_y=b$ 的点对 (x,y)，都一定有 $dist'(x,y) \in \{v, v+1, v+2\}$。

考虑 $dist'(x,y)=v$ 的充要条件。可知一定要存在区域 c 使得

$$f_{x,c}=g_{a,c}, f_{y,c}=g_{b,c}$$
$$v=g_{a,c}+g_{b,c}+1$$

对于前两个条件，可以预处理出满足 $f_{x,c}=g_{a,c}$ 的区域集 T_x。对于最后一个条件，可以处理出满足 $v=g_{a,c}+g_{b,c}+1$ 的区域集 S。那么条件可以转化为

$$T_x \cap T_y \cap S \ne \emptyset$$

预处理之后使用卷积处理即可。预处理总复杂度 $O(nk)$，卷积部分单次复杂度 $O(k \cdot 2^k)$，总复杂度 $O(k^3 \cdot 2^k)$。

类似的，考虑 $dist'(x,y)=v+1$ 的充要条件，容易发现形式比较复杂，不妨考虑 $dist'(x,y)=v+2$ 的充要条件。记满足 $v+1=g_{a,c}+g_{b,c}+1$ 的区域集为 S'，和前一种情况，可得条件为 $T_x\cap S=\emptyset, T_y\cap S=\emptyset, T_x\cap T_y\cap S'=\emptyset$，前两个条件容易判定，第三个条件同样用卷积处理即可。

单组测试数据时间复杂度 $O(nk+k^3 2^k)$，空间复杂度 $O(nk)$。

参考资料

Petrozavodsk Summer 2019. Day 8. Jingzhe Tang Contest 2 题解，https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=741&r=1