1 QOJ1844

1.1 题目大意

对一颗仙人掌图，使用以下两种操作，使得最终剩下图的边数最小：

- 选择一个度数为奇数的点，并将连向其的所有边删除；
- 复制一份当前的图，并在原图和复制图的对应顶点之间连边。这个操作只能使用至多 1 次。

1.2 数据范围

$1 \le n \le 3 \times 10^5$，$1 \le m \le \frac{3(n-1)}{2}$。

1.3 解题过程

我们可以说明，对任意仙人掌森林，我们总可以通过适当操作使得最终边数为 0。接下来我们会给出构造。

首先，我们可以进行极多的的 1 操作。具体地，每次找任意一个度数为奇数的结点，并对其进行 1 操作。直到所有结点顶点度数都是偶数为止。假设目前的图为 $G = (V, E)$，仍然是一个仙人掌森林，且图中没有割边。

这时我们需要进行一次 2 操作。

接下来，我们会只使用 1 操作，使得整个图的边被删空。

以 1 为根，作 G 的 dfs 树，并对每个结点进行黑白染色（dfs 树上距离 1 为偶数的染白色，否则染黑色），记作 col_u 为 1 是黑结点，为 0 为白结点。

按照 dfs 序枚举每个结点 u。如果 G 上和 u 相邻的结点当中，没有和 u 同色的且被打上了标记的，那么给 u 打上标记。

对于每个被打上标记的结点 u，对 $u + n \cdot col_u$ 进行 1 操作。这些操作互不影响，且都是能进行的。假设进行了这些操作后剩下的图是 $G' = (V', E')$。

我们接下来考察 E' 中有哪些元素：

- 1 类边：对于 G 非树边 (u, v)，$col_u = col_v$。则有 $(u + (1 - col_u) \cdot n, v + (1 - col_v) \cdot n) \in E'$；
- 2 类边：对于没有标记的点 u，有 $(u, u + n) \in E'$。
- 3 类边：对于没有标记的点 u，对所有树边 (u, v)，有 $(u + col_u \cdot n, v + col_u \cdot n) \in E'$；

我们接下来说明 G' 是一个森林。这点成立之后，我们可以每次删除 G' 的一个叶子使得清空整个图的边，这便达成了我们的目的：

我们可以把 2 类边增加到每个 u，都有 $(u, u + n) \in E'$。我们接下来说明 G' 仍然是个森林。这等价于证明下面的图 $G'' = (V'', E'')$ 是个森林：

- 1 类边：对于 G 非树边 (u, v)，$col_u = col_v$。则有 $(u, v) \in E''$；
- 3 类边：对于没有标记的点 u，对所有树边 (u, v)，有 $(u, v) \in E''$；

注意到 $E'' \subset E$，这表明 G'' 的简单环必然是 G 的一个简单环。于是我们只需要考虑所有 G 的简单环。那么我们只需要说明每个仙人掌的简单环上必然有一个标记过的点。

考虑 G 的每个简单环中，dfs 序第二小的点 u，该结点必然被标记。否则，会存在 u 向上的返祖边。这和这个简单环的唯一返祖边会相交。于是 G 不是仙人掌。导致矛盾。

1.4 参考资料

无。