QOJ 8184

题意简述

给定 n, m，定义 $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中不同的数的个数。定义一个正整数序列 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 合法，当且仅当 $\sum_{i=1}^m a_i = n$。

对于所有合法序列 $a_1, a_2, \dots, a_m$，求 $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 之和。

答案对 998244353 取模。

$1 \leqslant n \leqslant 10^{18}, 1 \leqslant m \leqslant \min(n, 500)$。

题解

枚举 $1 \leqslant x \leqslant n$，通过二项式反演求出包含 x 的合法序列有多少个，则答案为

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\binom{n-ix-1}{m-i-1}\\
=&\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\sum_{x=1}^{\frac{n-m+i}{i}}\binom{n-ix-1}{m-i-1}
\end{aligned}$$

则只需要对于每个 i，计算 $\sum_{x=1}^{\frac{n-m+i}{i}}\binom{n-ix-1}{m-i-1}$。

把 $\binom{n-ix-1}{m-i-1}$ 记为 $F_i(x)$，根据组合数的定义，在 $n-ix-1 \geqslant 0$ 时 $F_i(x)$ 是关于 x 的 $m-i-1$ 次多项式，则 $\sum_{i=1}^{x} F_i(x)$ 是关于 $m-i$ 的多项式。求出 $F_i(0), F_i(1), \dots, F_i(m-i)$ 并取前缀和，使用拉格朗日插值即可计算出 $\sum_{x=1}^{\frac{n-m+i}{i}}\binom{n-ix-1}{m-i-1}$。

复杂度 $O(m^3)$，瓶颈在于计算 $F_i(0), F_i(1), \dots, F_i(m-i)$。可以使用前缀积优化到 $O(m^2)$。

参考资料

无。