1 QOJ1874 - Goldberg Machine 2

1.1 题面描述

有一类机器：这类机器形如一个 $n \times m$ 的由 `>v.` 三种字符组成的字符矩阵，保证 $(1,1)$ 不为 `.`。

接下来，你可以在 $(1,1)$ 处重复放入小球，放入小球之后，小球会不断根据当前格子是 `>` 还是 `v`，决定是向右走还是向下走，在小球离开这个格子之后，这个格子的方向会反转，即从 `>` 变 `v`，`v` 变 `>`。

小球会一直运动直到走出矩阵或者走到某个 `.` 为止。

给定两个机器 S,T，满足它们所有 `.` 的位置相同，现在你需要回答：最少往 S,T 中放入总计多少个小球，才能使它们变得完全一样，如果不可能则输出 -1。

q 次修改，每次修改翻转 S 或 T 中的一个箭头，修改在不同操作之间保留，所有修改之前以及每次修改之后你需要输出问题的答案。

$1 \le n,m \le 100, 1 \le q \le 10^5$

1.2 题解

对这种操作的题目，我们可以考虑能不能找一个特征值，使得这个特征值在小球移动的时候不会改变，并且我们希望这个特征值最好是加性的，这样我们每放进去一个球就是给特征值加上一个定值。

如果我们当前局面为 S，小球在 c，并且每一个箭头是否是 `>` 用 $H_S(i)$ 表示，那么我们令特征值为：

$$\Delta = B(c) + \sum_i H_S(i)A(i)$$

其中 $A(i), B(i)$ 为我们合理选定的值，只与格子有关，与 S 具体箭头的指向无关。

那么根据小球的两种移动方式,我们可以得到:$B(i,j)+A(i,j) = B(i,j+1), B(i,j) = A(i,j) + B(i+1,j)$。

可以解出 $B(i,j) = \frac{1}{2}(B(i+1,j) + B(i,j+1)), A(i,j) = \frac{1}{2}(B(i,j+1) - B(i+1,j))$。

我们设每个 `.` 和出界的位置 c 的 B 值是一个形式变量 x_c，那么我们就可以递推出所有的 A,B，它们都是 x_c 的线性组合，并且显然系数的分母都是 2 的次幂。

而小球出界之后会让特征值 $-x_c$，因此我们只关心特征值 mod 1 的结果，这样放一个小球之后，在小球移动过程中特征值都不会改变。

我们可以发现：对于两个没有小球的局面，$S = T$ 当且仅当 $\Delta(S) = \Delta(T)$，这里 $S = T$ 指它们箭头方向完全相同。

若 $S \ne T$ 且 $\Delta(S) = \Delta(T)$，我们找到字典序最小的箭头方向不同的位置 (i,j)，再找到它右面第一个没有箭头的位置 (i,k)，$A(i,j)$ 中 $x_{(i,k)}$ 的系数为 $\frac{1}{2^{k-j}}$，而字典序大于 (i,j) 的格子 A 值中 $x_{(i,k)}$ 的系数都是 $\frac{1}{2^{k-j}}$ 的倍数，因此 (i,j) 的区别必定会导致 $\Delta(S) \ne \Delta(T)$。

那么接下来我们就可以注意到一些事情：放一个小球相当于给特征值加上 $B(1,1)$，若设 $B(1,1)$ 中最大的分母为 2^p，那么放球的最小周期一定是 2^p。我们要求的实际上就是一个 k 使得 $\Delta(S)+kB(1,1)\equiv\Delta(T)\pmod 1$。

我们可以任取一个 $B(1,1)$ 中分母最大的变量 x_{id}，然后用 $\Delta(S)$ 和 $B(1,1)$ 中 x_{id} 的系数进行比对，这样可以解出 $k \bmod 1$ 的值，再把这个 k 带入到其它 x 的系数中检验即可。

但是这样复杂度太高了：我们有 $O(nm)$ 个 x 变量，带着所有变量一起处理过于耗时，会让我们的复杂度变为 $O((nm)^2+qnm)$。

因此考虑随机：随机 K 次，每次随机将一些 x_c 设为 1，其余的设为 0。

- 此时 $B(1,1)$ 的分母为 2^p 的概率至少为 $\frac{1}{2}$，因此我们直接取这之中分母最大的作为 p 即可。
- 并且一个不合法的 k 在这样的计算方式下满足 $\Delta(S)+kB(1,1)\equiv\Delta(T)\pmod 1$ 的概率不超过 $\frac{1}{2}$。

我们取 K 次中任意一个分母最大的，用它解出 k 的值，然后代入 K 组中的每一组检验一下，这样我们错误概率是 2^{-K}。

取 $K=30$ 即可通过，复杂度为 $O(nmK+q(K+n+m))$。需要实现高精度加减乘，以及模 2^p 求逆元。