Kilk Not

题目大意

给定长为 n 的字符串 s，其中每个字符均为 `0`、`1`、`?` 三者之一。给定 a, b，满足 $a + b$ 与 s 中 `?` 的个数相等。你需要求出将 s 中所有 `?` 替换成 a 个 `0`，b 个 `1` 后，其最长相同字符子串的最小值。

数据范围

$1 \le T \le 10^5$，$1 \le \sum n \le 250,000$。

解题过程

首先二分答案。设最长相同子串的长度不超过 k，我们只需解决这一判定问题。接下来给出一个结论：设所有 `?` 替换为 `01` 且满足 k 的限制的字符串中，`0` 的个数最少为 $a_{\min}$，最多的为 $a_{\max}$，目标串中 `0` 的个数为 a'，则存在满足题目条件的串当且仅当 $a_{\min} \le a' \le a_{\max}$。证明：

结论的必要性是显然的。我们考虑如何证明其充分性。

设 $t_{\max}, t_{\min}$ 分别为 $a_{\max}, a_{\min}$ 对应的字符串。记 $T_i = t_{\max}[1:i] + t_{\min}[i+1:n]$。注意到 $T_0 = t_{\min}, T_n = t_{\max}$，而且 T_i 和 T_{i+1} 间 `0` 的个数相差不超过 1，因此必然存在 $0 \le i \le n$ 使得 T_i 中 `0` 的个数恰为 a' 个。只要 $t_{\max}[i] \neq t_{\min}[i+1]$，就不难说明 T_i 同时满足最长相同子串的限制。

接下来我们会说明确实存在一个这样的 i。不妨假设 $a_{\min} < a' < a_{\max}$，因为两个不等号取等的情况是平凡的。取最大的 p 使得 T_p 中 `0` 的个数小于 a'，由定义可知 $t_{\min}[p+1]$ 为 `0`，$t_{\max}[p+1]$ 为 `1`。考虑反证，若不存在这样的 i，则必须有 $t_{\min}[p+2]$ 为 `1`，否则 $p+1$ 即为一个可能的 i。但由 p 的定义，$t_{\max}[p+2]$ 也必须为 `1`，否则 T_{p+2} 中 `0` 的个数将同样为 $a'-1$。这样推演下去，可以发现 $\forall p+2 \le i \le n$，$t_{\min\,/\,\max}[i]$ 均为 `1`，于是可以得到 $a' = a_{\max}$ 的矛盾事实。因此原命题成立，证毕。

有了这一结论，我们只需想办法对二分的 k 求出 $a_{\min}, a_{\max}$ 以及 $t_{\min}, t_{\max}$ 即可解决问题。以求 $a_{\max}$ 为例，设 $f_{i,0/1}$ 表示考虑前缀 $[1,i]$ 并在 i 处填入字符 c，可能的 `0` 的个数的最大值。每次枚举一个极长相同子串进行转移，并使用单调队列优化，即可做到单次 $\mathcal{O}(n)$。结合二分答案，总复杂度 $\mathcal{O}(n\log n)$，可以通过。

参考资料

[本场比赛的题解](#)。