题解

ChiFAN

2026 年 4 月 17 日

题意

- 给定 n, m, p 对于所有 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le j \le m$ 计算 i 个点 j 条边的有标号无重边无自环联通广义串并联图数目对 p 取模的结果。
- $n, m \le 50, 10^8 \le p \le 10^9$，保证 p 是素数，2 s。

正解 1-刻画

- 考虑用图收缩操作刻画广义串并联图的方式。
- 事实上不断地做图收缩操作后得到的图是唯一确定的，因此我们考虑定义变换 $f: G \to G'$ 表示从图 G 出发不断执行图收缩操作最后得到图 G'。考虑通过 $f(G)$ 计算答案。具体地我们对于 $f(G) \neq \emptyset$ 的每个 $f(G)$ 计算其对应的 G 数目。再用总的联通图数目减去这个值就是答案。

正解 1-计算 $f(G)$

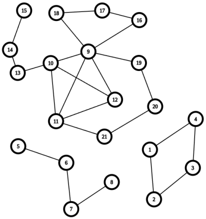
- 考察非空的 $f(G)$ 应该满足什么条件，该如何去计数。

正解 1-计算 $f(G)$

- 考察非空的 $f(G)$ 应该满足什么条件，该如何去计数。
- 非空的 $f(G)$ 应该满足所有点度数均大于等于 3，我们利用容斥计算这样的图的数目。

正解 1-计算 $f(G)$

- 我们用如下 5 种结构对图中的度数小于等于 2 的点进行描述。



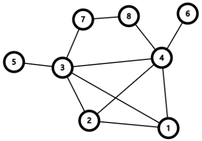
1. 孤立环：$1 - 2 - 3 - 4 - 1$。
2. 孤立链：$5 - 6 - 7 - 8$。
3. 挂在点上的链：$(10) - 13 - 14 - 15$。
4. 挂在点上的环：$(9) - 16 - 17 - 18 - (9)$。
5. 点之间的链：$(9) - 19 - 20 - 21 - (11)$。

正解 1-计算 $f(G)$

- 注意到如果我们钦定图上一些二度点，一度点以及零度点，那么被钦定的点存在唯一地被划分为上述 5 种极大结构的方式。
- 于是考虑设 $dp_{i,j,k}$ 表示有 i 个未钦定的点，j 个钦定的点，一共有 k 条边的所有方案带权和。
- 为了防止计重我们加入一个极大结构时需要保证其中编号最小点的编号是当前所有钦定的点中编号最小的，也就是加入一个 z 个点的结构系数为 $\binom{z+j-1}{z-1}$。
- 为了方便我们可以开始认为钦定的点和未钦定的点独立编号，最后乘上一个 $\binom{i+j}{i}$ 即可。
- 容易发现这个部分复杂度是 $O(n^4)$ 的。

正解 1-从 $f(G)$ 还原到 G

- 考虑从 $f(G)$ 还原 G 的过程。
- 事实上我们会将 $f(G)$ 中的一些边替换为一张进行若干次图收缩操作后得到一条边的图，还可能会将 $f(G)$ 中的一些点上挂上一个一度点，并将这个一度点替换为一张进行若干次图收缩操作后得到一个点的图。
- 但是这两个部分会算重，具体而言：



- 我们可能会用下面两种方式计算到这个图：
  1. 在 3 上挂 5，在 4 上挂 6，将边 $3-4$ 替换为 $(3)-7-8-(4)-(3)$。
  2. 将边 $3-4$ 替换为 $(3)-7-8-(4)-(3)$ 和 $3-5$ 以及 $4-6$。

正解 1-从 $f(G)$ 还原到 G

- 考虑如何防止计重。
- 我们发现当我们将边 $u - v$ 替换为图 G 时，要求 G 中所有点都满足：
  1. 可以在不经过 u 的前提下抵达 v。
  2. 可以在不经过 v 的前提下抵达 u。
- 即可保证一张图不会被算到多次。
- 如果求出了 $f_{i,j}, g_{i,j}$ 分别表示能收缩成一个点的 i 个点 j 条边的图数目和能收缩成一条边的 i 个点 j 条边的图数目，那么可以通过容斥计算出能收缩成一条边且满足上面这个要求的图数目。具体而言 g 是由满足要求的图两边挂上能收缩成一个点的图形成，因此倒推一下方案数即可。
- 这个部分暴力做是 $O(n^6)$ 的，但是我们分步卷积一下：先将两侧挂上能收缩成一个点的图的方案卷起来，再将得到的数组和满足要求的图对应的数组卷起来即可优化到 $O(n^4)$。

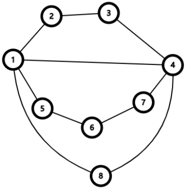
正解 1-求答案

- 考虑计算 f, g。
- 容易发现可以通过答案数组直接求出 f，唯一的问题是如何计算 g。
- 给出下面的结论：一个联通图 G 可以通过若干次图收缩操作后得到边 $u-v$ 当且仅当其加上这条边后是一个广义串并联图。
- 证明比较困难，放在最后一页。
- 那么有了这个结论我们就可以来计算 g。具体地，考察 g 对应的图 G 收缩成边 $u-v$ 时，我们研究图 G 加上这条边后形成的图 G' 形态，对边 $u-v$ 是否是图 G' 中的重边，是否是图 G' 中的割边即可从答案数组推出 g。
- 最后将 f, g, dp 合并的过程暴力做仍然是 $O(n^6)$ 的，但是我们依然可以通过分步卷积优化到 $O(n^5)$。

正解 2 from Navia

- 对于一张图 G，记其中的所有极大点双连通分量为 $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_k\}$，那么 G 是广义串并联图的充要条件是对于任意 $1 \le i \le k$ 都有导出子图 G'_i 可以只通过不断进行 compress 和 twice 操作得到一条边。
- 所以我们可以对每个点双计算合法方案然后拼起来。
- 对于一个点双 G' 而言，根据前面的结论其可以被收缩为任意一条存在于其中的边 $u-v$。我们考虑从 $u-v$ 还原整个点双的过程：不断地加入重边或者往边中插入一个点。然而直接考虑这个过程肯定会算重。

正解 2 from Navia



- 假若最后收缩成边 $1-4$，那么我们像上图一样直接将其展开为一张杏仁图。也就是由若干 $s(u) \to t(v)$ 的路径构成的图，不难发现图中每条边依然是一个将一张图收缩为一条边的子问题，于是从小往大 dp 求出所有答案即可。
- 注意我们计算了点双收缩成其中的每条边的方案，因此计算出来的 i 个点 j 条边的方案数还要除以 j。
- 时间复杂度也是 $O(n^5)$ 的。

引理

- 一个广义串并联图 G 可以通过若干次图收缩操作变成一条 E_G 中存在的边。
- 对图 G 建出 Top tree T，接下来我们归纳地证明：对于 $u \in T$，定义 sub_u 表示 u 子树内的点构成的子图，定义 $path_u$ 表示 u 的上下界点构成的边，我们可以通过若干次图收缩操作将 $G \backslash sub_u$ 内的点和边变成 $\emptyset$ 或者 $path_u$。
- 假若 u 是 Top tree 的根，该结论显然成立。
- 否则如果：

  1. u 的父亲是 rake 节点，假若 $path_u = path_{fa_u}$，则可以将 u 的兄弟节点收缩为 $\emptyset$ 即可，否则将 $path_{fa_u}$ 和 u 的兄弟一并收缩为 $\emptyset$ 即可。
  2. u 的父亲是 compress 节点，将 u 的兄弟 v 收缩成 $path_v$ 之后，如果 $path_{fa_u}$ 存在则对 $path_{fa_u}$ 和 $path_v$ 执行一次 compress 操作，否则对 $path_v$ 执行 rake。
  3. u 的父亲是 twice 节点，将 u 的兄弟 v 收缩成 $path_v$ 之后，如果 $path_{fa_u}$ 存在则对 $path_{fa_u}$ 和 $path_v$ 执行一次 twice 操作。

- 从上到下归纳即可证明该引理。

结论证明

- 充分性证明：由引理 1 可得图 G 加上边 $u-v$ 后可以通过进行若干次图收缩变成边 $u-v$，而在该收缩过程中，由于最后保留了边 $u-v$ 以及点 u, v，所以过程中所有操作均不涉及对点 u, v 的度数要求，又因为图 G 本身是联通的，所以一定对新加入的边 $u-v$ 执行过 twice 操作。因此图 G 本身也可以通过执行若干次图收缩操作变成边 $u-v$。
- 必要性证明：在图 G 执行若干次图收缩操作变成边 $u-v$ 的收缩过程中：由于最后保留了边 $u-v$ 以及点 u, v，所以过程中所有操作均不涉及对点 u, v 的度数要求，所以我们往图 G 上加入一条额外的边 $u-v$ 不会影响收缩过程，最后将额外加入的边与原本的边先执行一次 twice 操作再执行一次 rake 操作即可将图变成孤立点。因此加上边 $u-v$ 后的新图也是广义串并联图。